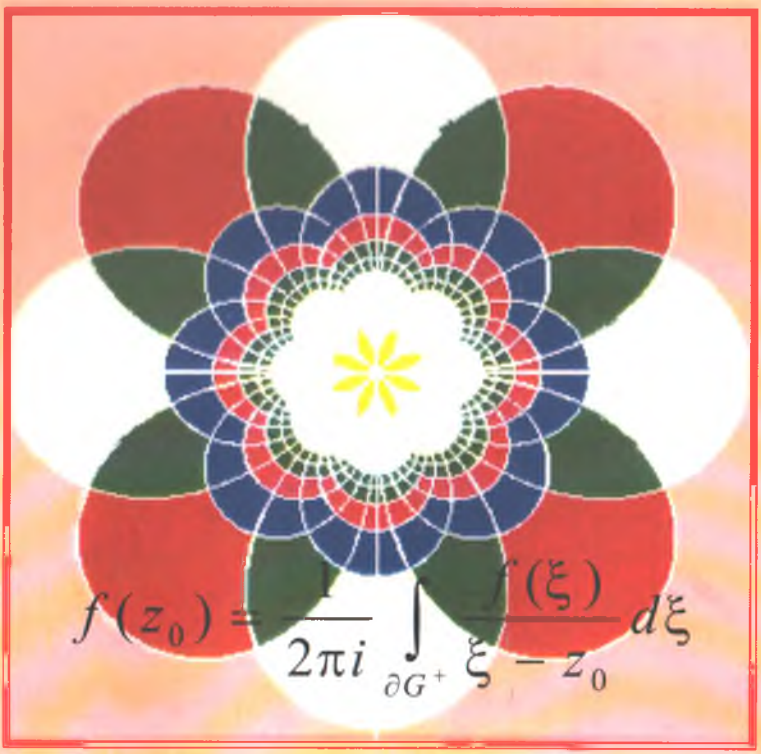
R.Y.Şükürov, T.B.Əsədov

# KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ



346619

R.Y.Şükürov, T.B.Əsədov

# KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

(Dərs vəsaiti)

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 09.04.2012-ci il tarixli 568 №li əmri ilə ali məktəb tələbələri üçün dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.*

Bakı- 2012

Ş-97

**Redaktor:** *dos. S.A.Feyziyev*

**Rəyçilər:** *prof. H.İ.Aslanov, prof. T.Ş.Hacıyev,*
*f.-r.e.d. Ə.Y.Axundov, dos. Z.Q.Sadıqov*

**R.Y.Şükürov, T.B.Əsədov. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi.** Bakı, ADPU-nin nəşri, 2012, 255 səh.

Vəsait kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin bütün əsas bölmələrini əhatə edir. Hər bir bölmənin əsas nəzəri məlumatları qısa şəkildə izah edilmiş, bir neçə tipik çalışmanın həlli göstərilmiş, müstəqil həll etmək üçün məsələ və misallar verilmişdir.

Vəsait «Riyaziyyat», «Riyaziyyat və informatika» müəllimliyi ixtisasları üzrə bakalavr pilləsində təhsil alan ali məktəb tələbələri, «Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi» fənnini tədris edən ali məktəb müəllimləri, həmçinin kursu müstəqil öyrənmək istəyənlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

## Ön söz

Kitab «Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi»nə dair dərs vəsaitidir. Hesab olunur ki, oxucu riyazi analizin və cəbrin əsas anlayışları ilə tanışdır.

Azərbaycan dilində «Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi»nə dair həm nəzəri, həm də praktiki aspektləri əhatə edən dərs vəsaitlərinin qıtlığı tələbələr üçün böyük çətinliklər yaradırdı. Bunu nəzərə alan müəlliflər bu boşluğu müəyyən dərəcədə doldurmaq üçün həm nəzəri, həm də praktiki məsələləri əhatə edən belə bir vəsaitin yazılması qənaətinə gəlmişlər. Müəlliflər düşünürlər ki, bu məqsədə müəyyən dərəcədə nail olmuşlar.

Vəsait Azərbaycan Müəllimlər İnstitutunda «Riyaziyyat və informatika müəllimliyi» ixtisası hazırlığı prosesində istifadə olunan materialların əsasında yazılmışdır. Vəsaiti iki hissəyə bölmək olar. Birinci hissədə kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinə dair nəzəri minimum material, ikinci hissədə isə müstəqil həll etmək üçün nəzəri materiala uyğun ardıcıllıqla məsələ və misallar cavabları ilə verilir.

Birinci fəsil kompleks ədədlər və onların müxtəlif yazılış formaları ilə bağlı əməllərə, kompleks müstəvidə çoxluqlara, kompleks ədədlər ardıcıllıqlarına həsr edilmişdir.

İkinci fəsil kompleks dəyişənli funksiyalar, onların kəsilməzliyi, limiti və müntəzəm kəsilməzliyinə, kompleks dəyişənli funksiyaların diferensiallanması və inteqrallanması, birrabitəli və çoxrabitəli oblastlar üçün Koşi teoremlərinə, kompleks dəyişənli funksiyaların qeyri-müəyyən inteqrallarına, kompleks dəyişənli funksiyalar üçün Koşi inteqralına və s. həsr edilir.

Üçüncü fəsildə kompleks dəyişənli analitik funksiya sıraları, funksional sıralar, qüvvət sıraları, yığılma radiusu, yığılma dairəsi anlayışları, kompleks dəyişənli funksiyaların Teylor sıralarına ayrılışı, analitik funksiyanın təyini, sıfırları, analitik davam anlayışı, Loran sırasına ayrılış və analitik funksiyanın məxsusi nöqtələri və onların tipləri ilə bağlı məsələlərə baxılır.

Dördüncü fəsil kompleks dəyişənli funksiyaların çıxıqları, onların hesablanması, çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə, çıxıqların inteqralların hesablanmasına tətbiqinə və s. məsələlərə həsr edilir.

Beşinci fəsildə konform inikaslar, onların əsas prinsipləri, bəzi əsas funksiyaların konform inikaslarına baxılır.

Vəsaitlə bağlı öz dəyərli fikirlərini bildirən oxuculara əvvəlcədən təşəkkürümüzü bildiririk.

*Müəlliflər*

# I FƏSİL. KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ KOMPLEKS ƏDƏDLƏR ARDICILLIĞI

## §1. Kompleks ədəd anlayışı. Kompleks ədədlər üzərində əməllər

XVI-XVII əsrlərdə kvadrat və kub tənliklərin həlli prosesində meydana gələn $a+b\sqrt{-1}$, $b \neq 0$ şəklində ifadələri «xəyali» ifadələr adlandırmağa başladılar.

Böyük ehtimalla demək olar ki, xəyali kəmiyyətlər ilk dəfə olaraq D.Kardanonun «Möhtəşəm incəsənət və ya cəbrin qaydaları haqqında» əsərində (1545) meydana gəldi. D.Kardano bu ədədləri faydasız, istifadəyə yararsız hesab edirdi. Bir çox digər böyük alimlər üçün də (İ.Nyuton, Q.Leybnits) xəyali kəmiyyətlərin cəbri və həndəsi məzmunu aydın deyildi və hətta, mistik idi.

$i=\sqrt{-1}$ simvolunu ilk dəfə L.Eyler (1794) təklif etdi. Kompleks ədədlər və onların həndəsi təsviri ilk dəfə olaraq danimarka alimi K.Vesselin əsərlərində (1799) verildi. 1831-ci ildə K.Qauss «kompleks ədəd» terminini daxil etdi.

Kompleks ədədlər çoxluğunun mühüm xassəsi (qapalılıq xassəsi) ondan ibarət idi ki, onlar üzərində əsas riyazi əməliyyatların nəticəsi kompleks ədədlər çoxluğundan kənara çıxmır. Sonrakı illərdə kompleks ədədlərin öyrənilməsi sürətlə davam etdirildi. Bu isə riyazi təhsilin mühüm elementinə çevrilən kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin meydana gəlməsi və təşəkkül tapmasına səbəb oldu.

### 1.1. Kompleks ədədlərin cəbri yazılış forması

***Tərif.*** *$z = a + ib$ şəklində verilmiş ifadəyə kompleks ədəd deyilir.*

Bu, həm də kompleks ədədin cəbri yazılış forması adlanır. Burada $a = \mathrm{Re}\, z$ -həqiqi hissə (Re-latın dilində **həqiqi** mənasını bildirən realiz sözünün birinci iki hərfidir), $b = \mathrm{Im}\, z$ -xəyali hissə(İmlatın dilində xəyali mənasını bildirən imaginarius sözünün birinci

iki hərflidir) əmsalı adlanan həqiqi ədədlər, $i = \sqrt{-1}$ – xəyali vahiddir. $i^2 = -1$.

Kompleks ədədlərə misallar. $0 = 0 + 0 \cdot i$, $-1 = -1 + 0 \cdot i$, $-i = 0 - 1 \cdot i$ və s.

Əgər $b = \operatorname{Im} z = 0$ olarsa, onda $z = a$ – həqiqi ədədddir, əgər $a = \operatorname{Re} z = 0$, $b \neq 0$ olarsa, onda $z = ib$ – saf (təmiz) xəyali ədəd adlanır. Deməliklə, deyə bilərik ki, həqiqi ədədlər çoxluğu ($R$) kompleks ədədlər çoxluğunun ($C$) alt çoxluğudur ($R \subset C$).

*Kompleks ədədlər üzərində hesab əməlləri*

1. İstənilən həqiqi $a$ ədədini belə də yazmaq olar: $a + 0i$.
2. Təmiz xəyali ədədi $-bi$ ədədini isə $0 + bi$ şəklində yazmaq olar.
3. İki kompleks ədəd üçün onların həqiqi və xəyali hissələri bərabər olarsa, onlara bərabər kompleks ədədlər deyilir. Başqa sözlə, iki $z_1 = a_1 + ib_1$ və $z_2 = a_2 + ib_2$ kompleks ədədi üçün $a_1 = a_2$ və $b_1 = b_2$ olarsa, onda onlara bərabər kompleks ədədlər deyilir.
4. $z = a - bi$ ədədi $z = a + bi$ ədədi üçün qoşma kompleks ədəd adlanır.

Qoşma kompleks ədədlər üçün aşağıdakıları yaza bilərik:

$z + \bar{z} = 2a$; $z - \bar{z} = 2bi$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Kompleks ədədin özünün qoşmasına hasilini tapaq.

$z\bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Deməli, həqiqi ədəd alınır.

*İki $z_1 = a + bi$ və $z_2 = c + di$ kompleks ədədinin cəmi $(a + c) + (b + d)i$ şəklində ədəddir,*

yəni $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

**Misal 1.1.** $z_1 = 2 + (-1)i$ və $z_2 = -1 + 3i$ üçün

$z_1 + z_2 = (2 + (-1)) + ((-1) + 3)i = 1 + 2i$.

Kompleks ədədlərin toplanması yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrinə malikdir.

yerdəyişmə: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

qruplaşdırma: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Məsələn, yerdəyişmə xassəsinin doğruluğunu isbat edək.

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

və $(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i=(a+c)+(b+d)i$.

Beləliklə, $(a+bi)+(c+di)=(c+di)+(a+bi)$.

*İki kompleks* $z_1=a+bi$ *və* $z_2=c+di$ *ədədinin fərqi* $z=z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$ *kimi təyin edilir.*

**Misal 1.2.** $z_1=4+5i$ və $z_2=-2+3i$:

$z=z_1-z_2=(4+5i)-(-2+3i)=(4-(-2))+(5-3)i=6+2i$.

*İki* $z_1=a+bi$ *və* $z_2=c+di$ *kimi kompleks ədədin hasili* $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$ *şəklində olan kompleks ədəddir.*

Doğrudan da, $a+bi$ və $c+di$ ədədlərini cəbri ikihədli kimi vurub, $i^2=-1$ olduğunu nəzərə alsaq, $z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ifadəsini alarıq.

**Misal 1.3.** $z_1=2-3i$ və $z_2=-4+2i$

$z_1\cdot z_2=(2-3i)\cdot(-4+2i)=2\cdot(-4)+2\cdot 2i+(-3)\cdot(-4)i+(-3)\cdot 2i^2=$

$=-8+4i+12i-6\cdot(-1)=-2+16i$

Kompleks ədədlərin hasili aşağıdakı xassələrə malikdir.

yerdəyişmə: $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

qruplaşdırma: $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;

paylama: $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

Kompleks ədədin qüvvəti $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n}$ şəklindədir.

*Qüvvətin xassələri:*

$z^n\cdot z^m=z^{n+m}$; $\left(z^n\right)^m=z^{nm}$; $(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n$

İki kompleks ədəd üçün $z_1$ kompleks ədədinin $z_2$ kompleks ədədinə nisbəti elə $z$ ədədinə deyilir ki, onun üçün $z\cdot z_2=z_2\cdot z=z_1$ şərti ödənsin.

*Praktikada iki* $z_1=a+bi$ *və* $z_2=c+di$ *kompleks ədədlərinin nisbəti* $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$ *kimi təyin edilir.*

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

**Misal 1.4.** $z_1 = 2 - 3i$ və $z_2 = 1 + 2i$ ədədlərinin nisbətini tapın.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2+4i-3i+6i^2}{1+4} = \frac{-4-7i}{5} = -0{,}8-1{,}4i$$

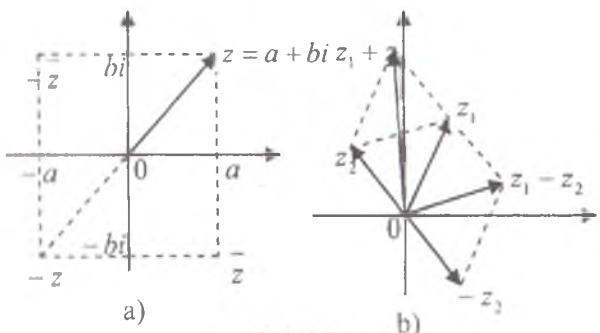
***Qeyd.*** Kompleks ədədlər çoxluğu nizamlanmamış çoxluq olduğundan kompleks ədədlərin müqayisəsi əməliyyatı müəyyən edilməmişdir.

## 1.2. Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri

Tutuq ki, müstəvi üzərində $xOy$ dekart koordinat sistemi verilmişdir. $z = a + bi$ kompleks ədədi müstəvinin koordinatları $(a;b)$ olan nöqtəsi kimi təsvir edilir. Kompleks ədədlər ilə müstəvinin nöqtələri arasındakı bu cür uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. Bu zaman həqiqi ədədlər absis oxunun, təmiz xəyali ədədlər isə ordinat oxunun nöqtələri vasitəsilə təsvir olunurlar. Ona görə də absis oxuna *həqiqi ox*, ordinat oxuna isə *xəyali ox* deyilir. Kompleks ədədlərin təsvir olunduğu müstəviyə *kompleks müstəvi* deyilir.

Aydındır ki, $z$ və $-z$ nöqtələri koordinat başlanğıcına nəzərən, $z$ və $\bar{z}$ nöqtələri isə həqiqi oxa nəzərən simmetrik nöqtələrdir.

$z = a + bi$ kompleks ədədi başlanğıcı koordinat başlanğıcında və sonu $z$ nöqtəsində olan vektor kimi də təsvir edilir və deməli, $z$ nöqtəsinin radius-vektoruna bərabərdir. Ona görə də «kompleks ədəd» və «vektor» anlayışları sinonim kimi də işlədilir. Koordinat müstəvisinə baxdıqda aydın olur ki, nə üçün kompleks ədədləri müqayisə etmək mümkün deyil (şək. 1a)).



Şəkil 1.

Həndəsi təsvir vasitəsilə kompleks ədədlərin toplanması və çıxılmasını əyani nümayiş etdirmək olar. Aydın olur ki, kompleks

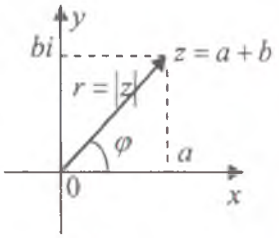
ədədlərin toplanması və çıxılması vektorların toplanması və çıxılması ilə eynidir(şək. 1b)).

### 1.3. Kompleks ədədin modulu və arqumenti

$z = a + bi$ kompleks ədədi təkcə dekart koordinatları ilə deyil, həm də polyar koordinatları ilə də birqiymətli təyin edilir. $r = |z|$ ifadəsi 0 nöqtəsindən $z$ nöqtəsinə qədər olan məsafə, $\varphi$ isə həqiqi oxun müsbət istiqaməti ilə $z$ vektorunun əmələ gətirdiyi bucaq olduqda. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə $z = a + bi$ kompleks ədədinin *modulu*, $\varphi$ bucağına isə $z$ $(z \neq 0)$ kompleks ədədinin *arqumenti* deyilir. Arqument birqiymətli funksiya olmadığından eyni bir kompleks ədədin arqumentləri $2\pi k$ toplananı ilə fərqlənirlər:

$Argz = \arg z + 2\pi k$ , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Arqumentin modulca ən kiçik qiyməti əsas arqument adlanır və $\arg z = \varphi$ kimi işarə edilir. Əsas arqument üçün $-\pi < \arg z \leq \pi$ ödənir.



Şəkil 2.

Arqumenti

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \quad (1)$$

düsturlarından təyin etmək olar.

Şəkil 2-dən görünür ki, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Buradan alırıq:

$$tg\varphi = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

Arqumenti tapmaq üçün kompleks ədədin hansı rübdə yerləşməsini nəzərə almaq lazımdır.

$$\arg z = \begin{cases} arctg\left|\frac{b}{a}\right|, & I \text{ rüb} \\ \pi - arctg\left|\frac{b}{a}\right|, & II \text{ rüb} \\ \pi + arctg\left|\frac{b}{a}\right|, & III \text{ rüb} \\ 2\pi - arctg\left|\frac{b}{a}\right|, & IV \text{ rüb} \end{cases}$$

**Qeyd.** (1) və (2) tənlikləri eynigüclü olmadıqlarından ((1)-dən (2) alınır, (2)-dən və (1) həmişə alınmır), əsas kimi (1)-in həlli götürülür.

Kompleks ədədlərin modulunun və arqumentinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

3. $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (üçbucaq bərabərsizliyi). Ümumiyyətlə, sonlu sayda $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleks ədədləri üçün $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ doğrudur.

*Qeyd.* $z = 0 + 0i$ kompleks ədədi üçün arqument anlayışının mənası yoxdur.

**Misal 1.5.** $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ədədinin modulu və arqumentini tapın.

$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan,

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1;\ tg\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3};\ \varphi = \frac{\pi}{3};\ \arg z = \frac{\pi}{3}$$

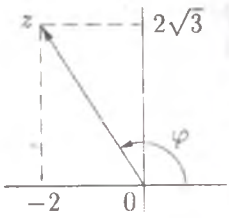
### 1.4. Kompleks ədədin triqonometrik yazılış forması

Kompleks ədədin $r$ moduluna və $\varphi$ arqumentinə polyar koordinatlar kimi baxsaq $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ yaza bilərik. Onda kompleks ədədin cəbri yazılışından triqonometrik yazılışına keçmək olar.

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, burada $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

**Misal 1.6.** $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ ədədini triqonometrik formada göstərin.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$. $\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



Şəkil 3.

$tg\varphi = \frac{b}{a} = -\sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$; $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{3}$. $z$ ədədi II rübə daxil olduğu üçün (şəkil 3) $\varphi = \arg z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Ona görə də $z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

**Misal 1.7.** $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ədədini triqonometrik formada yazın.

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$; $tg\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$; $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{3}$,

$z$ ədədi III rübə daxil olduğu üçün $\varphi = \arg z = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$,

$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

**Misal 1.8.** $z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ədədini triqonometrik formada yazın.

Tərifə görə $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$.

Onda modul $|z| = \sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \sqrt{2(1-\sin\alpha)}$, arqument isə

$$\arg z = arctg\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = arctg\frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

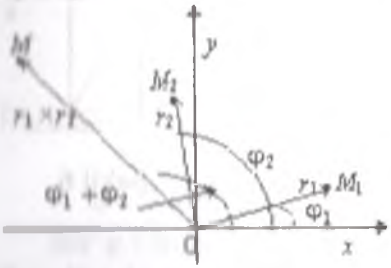
$$= arctg\frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

olar. Deməli, $z = \sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

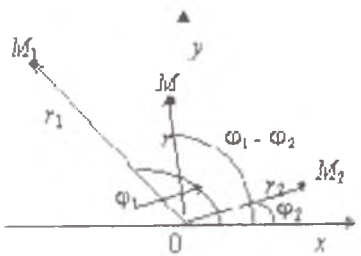
Triqonometrik formada verilmiş kompleks ədədlərin hasili və nisbəti aşağıdakı kimi tapılır.

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, (şək. 4)

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$. (şək. 5)




Şəkil 4.




Şəkil 5.

## 1.5. Kompleks ədədin üstlü yazılışı

Triqonometrik şəkildə verilmiş $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks ədədini üstlü şəkildə $z = re^{i\varphi}$ kimi yazmaq olar. Sağ tərəfləri bərabərləşdirib, $r=0$ ixtisar etsək, Eyler düsturunu alarıq: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Bu halda vurma, bölmə, qüvvətə yüksəltmə, kökalma düsturları aşağıdakı şəkli alar.

$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$; $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

$z_1^n = r_1^n e^{in\varphi}$; $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$.

**Misal 1.9.** $z_1 = 3e^{\frac{2\pi i}{3}}$; $z_2 = 6e^{\frac{\pi i}{6}}$;

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 6e^{\frac{2\pi i}{3}+\frac{\pi i}{6}} = 18e^{\frac{5\pi i}{6}}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2\pi i}{3}}}{6e^{\frac{\pi i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{2\pi i}{3}-\frac{\pi i}{6}} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{2}}$.

## 1.6. Kompleks ədədin tam qüvvətə yüksəldilməsi

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ şəklində verilmiş kompleks ədədin n-ci qüvvəti Muavr düsturu adlanan aşağıdakı düsturla hesablanır.

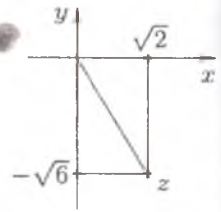
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

**Misal 1.10.** $z = (\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^4$ ədədini tapaq.

Əvvəlcə ədədi triqonometrik formada yazaq.

$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8}$.

$\varphi = arctg\left|\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right| = arctg\sqrt{3}$. $z$ ədədi IV rübə daxil olduğu üçün $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (şək. 6). Onda



Şəkil 6.

$\sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. Muavr düsturundan istifadə edərək yaza bilərik:

$$z^4 = \left(\sqrt{8}\right)^4\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) = 64\left(\cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 64\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 32(-1 + \sqrt{3}i)$$

**Misal 1.11.** Muavr düsturundan istifadə edərək $z = 1 + i$ ədədinin 30-cu dərəcədən qüvvətini tapın.

$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $tg\varphi = \frac{b}{a} = 1$, $z$ ədədi I rübə daxil olduğu üçün $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$. Ədədi triqonometrik formada yazaq.

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Muavr düsturundan istifadə edərək:

$$(1+i)^{30} = 2^{15}\left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) = 2^{15}\left(\cos\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2^{15}i$$

Muavr düsturu vasitəsilə triqonometrik funksiyalar üçün bəzi eyniliklər çıxarmaq olar. Tutaq ki, $z$ kompleks ədədinin modulu 1-ə bərabərdir. Onda Muavr düsturu aşağıdakı şəkli alar.

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

$n = 2$ olduqda, alarıq:

$$\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Buradan məlum düsturu alarıq.

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi ; \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi .$$

$n = 3$ olduqda

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi .$$

Buradan alarıq

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi ;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

## 1.7. Kompleks ədədən kökalma

$z$ kompleks ədədinin $n$-ci dərəcədən kökü ($n \in N$, $n \geq 2$) elə $u$ kompleks ədədidir ki, bu ədəd $u^n = z$ şərtini ödəsin.

$n$-ci dərəcədən kök almaq üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edilir:

$$u = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right); \; k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$$

$n$-ci dərəcədən kök $n$ qiymətə malikdir.

$\sqrt[n]{z}$ qiymətinə uyğun olan nöqtələr mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu $R = \sqrt[n]{|z|}$ olan çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün $n$ bucaqlının təpə nöqtələridir.

**Misal 1.12.** $z = 32(-1 + \sqrt{3}i)$ ədədinin 4-cü dərəcədən köklərini tapın.

$$tg\varphi = \frac{-32\sqrt{3}}{32} = -\sqrt{3}.$$

$z$ ədədi II rübə daxildir, deməli, əsas arqumenti $\arg z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ kimi götürmək olar. Onda

$$w = \sqrt[4]{64}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

$k = 0,1,2,3$;

$$w_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i;$$

$$w_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i;$$

$$w_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i;$$

$$w_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$$

**Misal 1.13.** $z = -1 + i$ ədədinin 3-cü dərəcədən köklərini tapın.

$z$ ədədini triqonmetrik formada yazaq.

$$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};\ tg\varphi = -1.$$

$z$ ədədi II rübə daxildir, deməli, $\arg z = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, onda alarıq

$$w = \sqrt[3]{-1+i};\qquad w = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right);$$

$$w = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2;$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \approx 1{,}19 + 1{,}19i;$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx -1{,}08 + 0{,}35i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$w_0, w_1, w_2$ köklərinin həndəsi interpretasiyası 1-ci şəkildə verilmişdir.



Şəkil 7.

## §2. Kompleks ədədlər ardıcıllığı

Kompleks ədədlər ardıcıllığına həqiqi ədədlər ardıcıllığına analoji şəkildə tərif verilir. Kompleks qiymətlər alan natural arqumentin funksiyasına $z_n = f(n), n \in N$ **kompleks** *ədədlər ardıcıllığı* deyilir. Kompleks ədədlər ardıcıllığı $\{z_n\}$ kimi işarə edilir. Ardıcıllığın ixtiyari $z_n$ elementini onun $n \in N$ nömrəsinə əsasən təyin edən $f$ qaydası verilmişsə, onda deyirlər ki, $\{z_n\}$ kompleks ədədlər ardıcıllığı verilmişdir.

**Misal 1.14.** $z_n = \frac{i^n}{2n}$ ardıcıllığının ilk 3 həddini tapın.

$$z_1 = \frac{i^1}{2 \cdot 1} = \frac{i}{2};\ z_2 = \frac{i^2}{2 \cdot 2} = \frac{-1}{4};\ z_3 = \frac{i^3}{2 \cdot 3} = -\frac{i}{6}.$$

Kompleks ədədlər ardıcıllığına ən ümumi şəkildə aşağıdakı kimi tərif verilir:

***Tərif.*** *Kompleks ədədlərin nizamlanmış hesabi çoxluğuna kompleks ədədlər ardıcıllığı deyilir.*

Ardıcıllığın hədləri onların nömrələrinə uyğun olaraq yerləşir.

***Tərif.*** *$\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ varsa ki, $\forall n > N$ üçün $|z_n - a| < \varepsilon$ olsun, onda deyirlər ki, $\{z_n\}$ kompleks ədədlər ardıcıllığı $a$ kompleks ədədinə yığılır və $n \to \infty$ olduqda $\{z_n\} \to a$ və ya $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ kimi yazılır.*

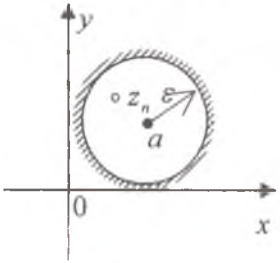
Limiti olan ardıcıllığa *yığılan ardıcıllıq* deyilir.

***Tərif.*** *$|z - z_0| < \varepsilon$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna $z_0$ nöqtəsinin $\varepsilon$ ətrafı deyilir(şək. 8).*



Şəkil 8.

Kompleks ədədlər ardıcıllığının limitinin həndəsi mənası o deməkdir ki, $\{z_n\}$ ardıcıllığının bütün hədləri müəyyən $N$ nömrəsindən başlayaraq mərkəzi $a$ nöqtəsində və radiusu $\varepsilon$ olan dairənin daxilində yerləşir. Başqa sözlə, $a$ nöqtəsinin $\varepsilon$ ətrafında yerləşir. Beləliklə, $a$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafında $\{z_n\}$ ardıcıllığının sonlu sayda hədləri istisna olmaqla, bütün hədləri yerləşərsə, onda $a$ nöqtəsi $\{z_n\}$ ardıcıllığımn limitidir(şək. 9).




Şəkil 9.

**Misal 1.15.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$, $z = x + iy$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ yoxdur, çünki, $n$ - cüt olduqda, $\arg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$, $n$ tək olduqda $\arg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \pi$.

Kompleks ədədlər ardıcıllığının verilməsi eyni zamanda bir cüt həqiqi ədədlər ardıcıllığının verilməsi deməkdir, yəni $z_n = a_n + ib_n$ olarsa, onda $\{z_n\}$ ardıcıllığının verilməsi eyni zamanda $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqlarının verilməsi deməkdir.

***Teorem 2.1.*** (Yığılmanın zəruri və kafi şərti). *$\{z_n\} \to a + ib$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\{a_n\} \to a$ və $\{b_n\} \to b$ olmasıdır.*

*İsbatı.* ▲ *Zəruriliyi.* $\{z_n\} \to z = a + ib$ olması o deməkdir ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ varsa ki, $\forall n \geq N$ üçün $|z_n - z| < \varepsilon$ ödənir. Yəni $|a_n - a| \leq |z_n - z| < \varepsilon$, $|b_n - b| \leq |z_n - z| < \varepsilon$. Buradan isə $\{a_n\} \to a$ və $\{b_n\} \to b$ alınır.

*Kafilik.* Şərtə görə $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N_1(\varepsilon)$ varsa ki, $\forall n \geq N_1$ üçün $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ və $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N_2(\varepsilon)$ varsa ki, $\forall n \geq N_2$ üçün $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ödənir. $N = \max\{N_1, N_2\}$ işarə edək. Onda $\forall n \geq N$ üçün yaza bilərik: $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ▼.

Yuxarıdakı teorem yığılan kompleks ədədlər ardıcıllıqları üçün yığılan həqiqi ədədlər ardıcıllıqlarının xassələrinə analoji xassələri söyləməyə imkan verir:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}, \quad \lim_{n\to\infty} w_n \neq 0 \text{ olduqda.}$$

***Tərif.*** *Əgər* $\exists A > 0$ *varsa ki,* $\forall n \geq N$ *üçün* $|z_n| \leq A$ *olsun, onda* $\{z_n\}$ *ardıcıllığına məhdud ardıcıllıq deyilir.*

İstənilən yığılan ardıcıllıq məhduddur. Ancaq bu təklifin tərsi doğru deyil.

***Teorem 2.2.*** *İstənilən məhdud ardıcıllıqdan yığılan alt ardıcıllıq seçmək olar.*

*İsbatı.* ▲Bu teoremin isbatı teorem 2.1 və yığılan məhdud həqiqi ədədlər ardıcıllığı üçün doğru olan Bolsano-Veyerştrass teoreminə əsaslanır. $\{z_n\}$ ardıcıllığı məhdud olduğundan ona uyğun olan $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları da məhduddur. Onda $\forall n \geq N$ üçün $|a_n| + |b_n| \leq |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |z_n| < A$ yazmaq olar. $|a_n| < A$ olduğundan elə $\{a_{n_k}\} \to a$ var ki, $|a| < A$ doğrudur. $\{a_{n_k}\}$ alt ardıcıllığına uyğun olan alt ardıcıllıq üçün yaza bilərik: $|b_{n_k}| < A$. Buradan

ADPU
Əsaslı kitabxana

alınır ki, elə $\{b_{n_k}\} \to b$ var ki, $\{a_{n_k}\} \to a$. Onda teorem 2.1-ə əsasən yaza bilərik: $\{z_{n_k}\} \to z = a + ib$: $|z| < A$ ▼.

***Koşi meyarı.*** *$\{z_n\}$ ardıcıllığının $z$ ədədinə yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N$ və $\forall m > 0$ üçün $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ olmasıdır.*

*İsbatı.* ▲Teoremin isbatı teorem 2.1 və həqiqi ədədlər ardıcıllığı üçün Koşi meyarına əsaslanır.

*Zərurilik.* $\{z_n\}$ ardıcıllığı yığılan olduğu üçün uyğun $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ həqiqi ədədlər ardıcıllıqları üçün Koşi meyarı ödənir.

*Kafilik.* $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ olmasından alınır ki, $|a_{n+m} - a_n| \leq |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ və $|b_{n+m} - b_n| \leq |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$. Bu isə $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ həqiqi ədədlər ardıcıllıqlarının yığılması üçün kafi şərtdir. Deməli, $\{z_n\}$ ardıcıllığı yığılır▼.

***Tərif.*** *Əgər $\forall A > 0$ üçün $\exists N(A)$: $\forall n \geq N(A)$ üçün $|z_n| > A$ olsun, onda $\{z_n\}$ ardıcıllığına qeyri-məhdud ardıcıllıq deyilir.*

**Misal 1.16.** a) $z_n = z^n$, $|z| > 1$ olduqda; b) $z_n = in$ ardıcıllığı $\forall n \geq N$ üçün qeyri-məhdud ardıcıllıqlardır.

Adi mənada bu ardıcıllıqlar yığılan deyil. Ancaq elə $\exists z_\infty = \infty$ var ki, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ nöqtəsi kompleks müstəvinin yeganə sonsuz uzaqlaşmış nöqtəsidir. Bütün qeyri-məhdud ardıcıllıqlar bu nöqtəyə yığılır. Əgər $\{z_n\}$ ardıcıllığı qeyri-məhdud artandırsa, onda $\left\{\xi_n = \frac{1}{z_n}\right\} \to 0$. Buradan sonsuz uzaqlaşmış nöqtə ilə hesab əməllərinin qaydası alınır: $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$; $z \cdot \infty = \infty, z \neq 0$; $z + \infty = \infty$; $\frac{z}{\infty} = 0$, $z \neq \infty$.

$\frac{0}{0}$, $\infty \pm \infty$ $0 \cdot \infty$ və $\frac{\infty}{\infty}$ əməliyyatları isə qeyri-müəyyəndir.

**Tərif.** $(z_n)$ *ardıcıllığı üçün* $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ *olarsa, onda deyirlər ki,* $(z_n)$ *ardıcıllığı sonsuzluğa yığılır və* $\lim_{n\to\infty} z_n=\infty$ *yazırlar.*

$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ ifadəsinin həndəsi mənasına baxaq. Bu ifadə o deməkdir ki, $\forall R>0$ üçün elə $N$ var ki, $\forall n\geq N$ üçün $|z_n|>R$ ödənilir.

Bu isə o deməkdir ki, $z_n$ nöqtələri mərkəzi sıfır nöqtəsində və radiusu $R$ olan dairədən kənarda yerləşir. Bu çoxluq sonsuzluğun ətrafı adlanır. Deməli, $z_\infty=\infty$ nöqtəsi o vaxt $\{z_n\}$ çoxluğunun limiti adlanır ki, $z_\infty=\infty$ nöqtəsinin istənilən ətrafında bu ardıcıllığın ya bütün həddləri, ya da sonlu sayda nöqtələrini çıxmaqla qalan həddləri yerləşir.

Beləliklə, $z_\infty=\infty$ ədədinə simvolik olaraq sonsuz uzaqlaşmış nöqtə uyğun qoyulur.

**Tərif.** *Kompleks müstəvi sonsuz uzaqlaşmış nöqtə ilə birlikdə genişlənmiş kompleks müstəvi adlanır.*

## 2.1. Stereoqrafik proyeksiya. Riman sferası

Genişlənmiş kompleks müstəvinin həndəsi təsvirini verək.

Fəzada düzbucaqlı $O\xi\eta\zeta$ koordinat sistemi və mərkəzi $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ nöqtəsində olan, radiusu $\frac{1}{2}$-ə bərabər, kompleks müstəviyə toxunan $S$ sferasına baxaq. $O\xi\eta$ müstəvisini $z$ kompleks müstəvisi ilə üst-üstə salaq. $S$ sferasının tənliyi

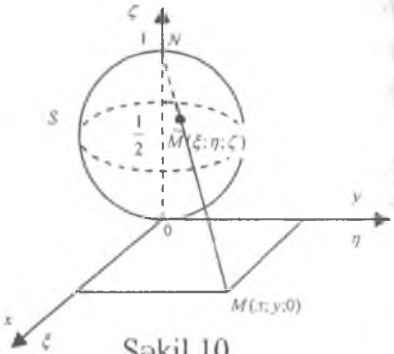
$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$ şəklindədir.

$z$ kompleks müstəvisinin hər bir $M$ nöqtəsinə $NM$ şüasının $S$ sferası ilə kəsişmə nöqtəsi olan $\tilde{M}$ nöqtəsini qarşı qoyaq. Bununla sfera ilə kompleks müstəvinin nöqtələri arasında qarşılıqlı uyğunluq yaradılır. $O$ nöqtəsinə diametral əks istiqamətdə yerləşən $N$ nöqtəsinə $z$ kompleks müstəvinin heç bir nöqtəsi uyğun deyil. Uyğunluğun qarşılıqlı birqiymətli olması üçün $z$ kompleks müstə-

visinə $z_r = \infty$ nöqtə sini də əlavə etmək lazımdır. $N$ n öqtəsinə $z_r = \infty$ nöqtəsini uyğun qoysaq, alınan uyğunluq $\varphi : z \to S$ qarşılıqlı birqiymətli olar. Aydındır ki, kompleks müstəvidə $z_\infty = \infty$ nöqtəsinə yığılan $\{z_n\}$ çoxlüğüna $S$ sferasının $N$ nöqtəsinə yığılan nöqtələr çoxluğu uyğundur.

Genişlənmiş kompleks müstəvi ilə $S$ sferasının nöqtələri arasındakı bu cür uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. Bu uyğunluq stereoqrafik proyeksiya adlanır. $S$ sferasına isə Riman sferası deyilir.

$\tilde{M}$ nöqtəsinə $z$ kompleks müstəvinin $M$ nöqtəsinin $S$ sferası üzərində *stereoqrafik proyeksiyası* deyilir. Əgər $\tilde{M}$ nöqtəsi meridian boyunca hərəkət edirsə, $N\tilde{M}$ şüası $z$ kompleks müstəvisində $O$ nöqtəsindən çıxan şüa cızır. Əgər $\tilde{M}$ nöqtəsi paralel boyunca hərəkət edirsə, $N\tilde{M}$ şüası $z$ kompleks müstəvidə mərkəzi $O$ nöqtəsində olan çevrə cizir (şək.10). Buradan alınır ki, sfera üzərində koordinatlar şəbəkəsi kompleks müstəvidə polyar koordinatlar şəbəkəsinə keçir. Bu zaman sfera üzərində meridianlar və paralellər, eləcə də kompleks müstəvidə polyar koordinat xətləri bir-biri ilə düz bucaq altında kəsişirlər, başqa sözlə, bucaqlar saxlanılır.



Şəkil 10.

Bu cür uyğunluq zamanı $z = 0$ kompleks ədədinə sferanın $O(0;0;0)$ nöqtəsi, eyni arqumentli kompleks ədədlərə (koordinat başlanğıcından çıxan şüalara) –meridianlar, modulu ($|z|$) eyni olan kompleks ədədlərə (mərkəzi koordinat başlanğıcında olan müstəvinin çevrələrinə) –paralellər uyğun qoyulur.

Kompleks ədədləri ($z_r = \infty$da daxil olmaqla) Riman sferasının nöqtələri vasitəsilə təsvir etmək olar. Bu zaman yığılan kompleks ədədlər ardıcıllığı Riman sferasında yığılan ardıcıllıq kimi təsvir olunur.

Stereoqrafik proyeksiya zamanı çevrə-çevrəyə, müstəvinin kəsişən oyriləri arasındakı busaq onların Riman sferası üzərindəki obrazları arasındakı bucağa keçir.

İndi isə $z = x + iy$ kompleks ədədinin $M(x;y;0)$ nöqtəsinin koordinatları ilə onun sfera üzərindəki təsviri olan $\tilde{M}(\xi;\eta;\zeta)$ nöqtəsinin koordinatları arasındakı əlaqəni ifadə edən düsturları tapaq:

$M(x;y;0)$, $\tilde{M}(\xi;\eta;\zeta)$ və $N(0;0;1)$ nöqtələrinin bir düz xətt üzərində yerləşməsini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-0}{0-1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\xi}{1-\zeta}\\ y=\dfrac{\eta}{1-\zeta}\end{cases} \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2} \qquad (2)$$

$\tilde{M}$ nöqtəsinin $S$ sferası üzərində olduğunu nəzərə alsaq:

$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\xi^2+\eta^2=\zeta-\zeta^2$ olar. Bunu (2)-də nəzərə alsaq

$(x^2+y^2)(1-\zeta)^2=\zeta-\zeta^2$, $x^2+y^2=\dfrac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\zeta)^2}$, $x^2+y^2=\dfrac{\zeta}{1-\zeta}$ alarıq.

Buradan $\zeta=\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$ (3)

alırıq. İndi (3)-ü (1)-də nəzərə alaq. Onda

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}\\ \eta=\dfrac{y}{1+x^2+y^2}\end{cases} \qquad (4)$$

Nəhayət, alırıq:

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2};\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2};\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \qquad (5)$$

Bu düsturlar stereoqrafik proyeksiya düsturları adlanır. Kompleks müstəvidə $M(x;y;0)$ nöqtəsinin $z = x + iy$ koordinatlarını bi-

lərək, onun sfera üzərindəki təsviri olan $\tilde{M}(\xi;\eta;\zeta)$ nöqtəsinin koordinatlarını və tərsinə, tapmaq olar.

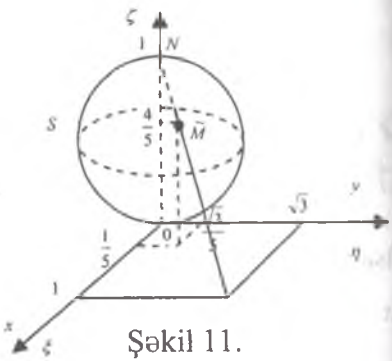
**Misal 1.17.** $z = 1+\sqrt{3}i$ nöqtəsinin stereoqrafik proyeksiyasını tapın və qurun.

*Həlli.* $z = 1+\sqrt{3}i$, $x = 1$, $y = \sqrt{3}$. Onda $|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$. Stereoqrafik proyeksiya düsturlarını tətbiq etsək, alarıq:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$\xi = \frac{1}{5},\ \eta = \frac{\sqrt{3}}{5},\ \zeta = \frac{4}{5}$. $\tilde{M}\left(\frac{1}{5};\frac{\sqrt{3}}{5};\frac{4}{5}\right)$ axtarılan nöqtədir(şək. 11).

Stereoqrafik proyeksiya mühüm xassəyə malikdir. Stereoqrafik proyeksiyada kompleks müstəvidə çevrə Riman sferasında çevrəyə keçir və əksinə, Riman sferasında $N$ polyusundan keçməyən çevrələrə kompleks müstəvidə çevrələr uyğundur. Bunu $z$ kompleks müstəvidə mərkəzi koordinat başlanğıcında və radiusu $R$-ə bərabər olan çevrə üçün göstərək.



Şəkil 11.

*İsbatı.* ▲ $x^2+y^2 = R^2$. Buradan $|z|^2 = R^2 \Rightarrow |z| = R$. $x^2 = \xi^2(1+R^2)^2$, $y^2 = \eta^2(1+R^2)^2$. Onda $\xi^2+\eta^2 = \frac{R^2}{(1+R^2)^2}$, $\zeta = \frac{R^2}{1+R^2}$.

$N$ polyus nöqtəsindən keçən çevrə isə xüsusi hal təşkil edir. Bu çevrə Riman sferası ilə $A\xi+B\eta+C\zeta+D=0$ müstəvisinin kəsişməsidir. Burada $C+D=0$. Başqa sözlə,

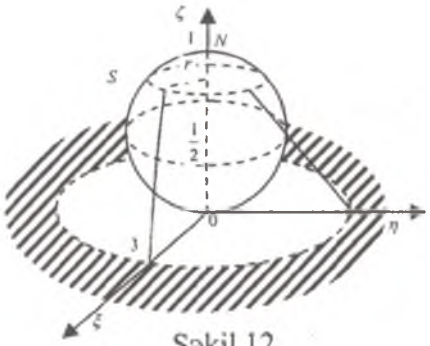
$$\begin{cases} A\xi+B\eta+C\zeta+D=0 \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \end{cases}$$

Stereoqrafik proyeksiya düsturlarını tətbiq etsək, alarıq:

$A\frac{x}{1+|z|^2}+B\frac{y}{1+|z|^2}+C\frac{|z|^2}{1+|z|^2}+D=0$. Sonuncu bərabərliyin hər tərəfini $1+|z|^2$-na vursaq, alarıq: $Ax+By+(C+D)|z|^2+D=0$. $C+D=0$ olduğundan $Ax+By+D=0$. Bu isə kompleks müstəvidə düz xəttin tənliyidir. Beləliklə, $N$ polyus nöqtəsindən keçən çevrəyə kompleks müstəvidə düz xətt və tərsinə, kompleks müstəvidə ixtiyari $Ax+By+D=0$ düz xəttə Riman sferasında $N$ polyus nöqtəsindən keçən çevrə uyğundur.

**Misal 1.18.** Kompleks müstəvidə $|z|>3$ bərabərsizliyi ilə verilmiş nöqtələr çoxluğunun stereoqrafik proyeksiyasını tapın və qurun.

*Həlli.* Əvvəlcə $|z|=3$ çevrəsinin stereoqrafik proyeksiyasını quraq. Bu $\xi^2+\eta^2=\frac{9}{10}$ $(r=0{,}3)$ çevrəsidir. Bu, çevrə Riman sferasının $\zeta=\frac{9}{10}$ müstəvisi ilə kəsişməsi (ştrixlənmiş sahə) axtarılan çoxluqdur(şəkil 12).



Şəkil 12.

## § 3. Kompleks dəyişənli funksiya anlayışı

Tutaq ki, kompleks müstəvidə $E$ çoxluğu və $\forall z \in E$ nöqtəsinə müəyyən $w$ kompleks ədədini uyğun qoyan $z \to w$ qanunu verilmişdir. Onda deyirlər ki, $E$ çoxluğunda kompleks dəyişənli $f(z) = w$ funksiyası verilmişdir. $E$ çoxluğu $f(z)$ funksiyasının təyin oblastı, uyğun $w$ nöqtələr çoxluğu olan $M$ çoxluğu isə qiymətlər çoxluğu adlanır. Məsələn, $w = z^2$ funksiyası hər bir $z = x + iy$ kompleks ədədinə $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ kompleks ədədini qarşı qoyur.

**Misal 2.19.** $w = az + b$; $w = z^n$; $w = \frac{1}{z}$ funksiyaları kompleks dəyişənli funksiyalardır.

Əgər $E$ çoxluğunun hər bir $z \in E$ nöqtəsinə $M$ çoxluğunun yalnız bir $w \in M$ nöqtəsi uyğun qoyulursa, onda funksiya birqiymətli, əgər $E$ çoxluğunun hər bir nöqtəsinə $M$ çoxluğunun iki və daha artıq nöqtəsi uyğun qoyulursa, onda funksiya çoxqiymətli və ya sonsuz qiymətli adlanır. $w \in M$ nöqtəsinə $z \in E$ nöqtəsinin obrazı, $z \in E$ nöqtəsinə isə $w \in M$ nöqtəsinin proobrazı deyilir. $f(z)$-in verilməsi $E \to M$ inikasının verilməsi deməkdir.

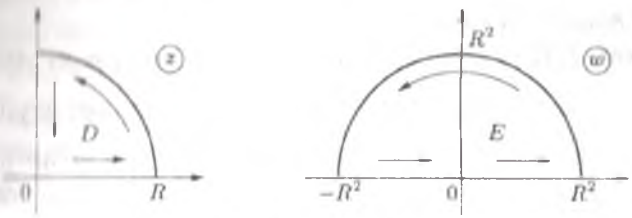
Müstəvi və ya üçölçülü dekart koodinat sistemində kompleks dəyişənli funksiyanın özünü necə aparmasını qrafik vasitəsilə təsvir etmək olmaz. Bunu təsvir etmək üçün $w = f(z)$ funksiyasının əyriləri və oblastları hansı çoxluğu inikas etdirdiyini müəyyənləşdirmək lazımdır.

**Misal. 2.20.** $w = z^2$ funksiyasının radiusu $R$ olan dairənin birinci rübə düşən hissəsini hansı oblasta inikas etdirdiyini tapın.

*Həlli.* $w$ və $z$ dəyişənlərini üstlü formada yazaq.

$z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$. $w = z^2$ olduğundan yaza bilərik,

$\rho e^{i\theta} = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Buradan alınır ki, $\rho = r^2$, $\theta = 2\varphi$. Bu isə onu göstərir ki, $z$ müstəvisinin həqiqi oxunun $0 \le r \le R$, $\varphi = 0$ hissəsi $w$ müstəvisinin həqiqi oxunun $0 \le \rho \le R^2$,




Şəkil 13.

$\theta = 0$ parçasına keçər; $r = R$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ dairəsinin dörd də biri $\rho = R^2$, $0 \le \theta \le \pi$ yarımdairəsinə keçər. Xəyali oxun $0 \le r \le R$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ parçası $0 \le \rho \le R^2$, $\theta = \pi$ parçasına keçər(şək. 13). $D$ çoxluğunun hər bir $z$ nöqtəsi $E$ yarımdairəsinin daxili $w$ nöqtəsinə keçər.

$z = x + iy$ olduqda $f(z) = w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$. Deməli, $f(z)$ funksiyasının verilməsi eyni zamanda iki həqiqi dəyişənli funksiyanın verilməsi deməkdir. Ona görə də kompleks dəyişənli funksiyanın xassələri iki həqiqi dəyişənli funksiyanın xassələri ilə müəyyən olunur. Məsələn, $w = z^2$ funksiyası üçün $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

$E$ və $M$ çoxluqlarının strukturları müxtəlif ola bilər. Biz $E$ və $M$ çoxluqlarının kompleks müstəvidə oblast olduğu hallara baxacağıq.

***Tərif.*** *Kompleks müstəvinin nöqtələr çoxluğu olan $G$ çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyərsə, ona oblast deyilir.*

1) $\forall z \in G$ nöqtəsi $G$-nin daxili nöqtəsidir.

2) $\forall z_1, z_2 \in G$ nöqtələrini, ancaq $G$-nin nöqtələrindən ibarət sonlu sayda sınıq xətlə birləşdirmək olar.

**Misal 2.21.** a) $|z| < 1$ oblastdır; b) $|z| \le 1$ oblast deyildir.

***Tərif.*** *Kompleks müstəvinin mərkəzi $z_0$ nöqtəsində və radiusu $\varepsilon$ olan çevrənin $|z - z_0| < \varepsilon$ daxilindəki nöqtələr çoxluğuna $z_0$ nöqtəsinin $\varepsilon$ ətrafı deyilir.*

***Tərif.*** *Əgər* $z_0$ *nöqtəsinin* $|z-z_0|<\varepsilon$ *ətrafından olan bütün nöqtələr* $G$ *çoxluğuna daxildirsə, onda* $z_0$ *nöqtəsinə* $G$ *çoxluğunun daxili nöqtəsi deyilir.*

**Misal 2.22.** a) $z=0$ nöqtəsi $|z|<1$ çoxluğunun daxili nöqtəsidir;

b) $z=i$ nöqtəsi $|z|\le 1$ çoxluğunun daxili nöqtəsi deyil.

Beləliklə, oblastın tərifindəki 1) şərti göstərir ki, oblast açıq çoxluqdur; 2) şərti isə göstərir ki, oblast əlaqəli (rabitəli) çoxluqdur. Deməli, oblast açıq və rabitəli çoxluqdur.

***Tərif.*** *Əgər* $z_0$ *nöqtəsinin ixtiyari* $|z-z_0|<\varepsilon$ *ətrafında həm* $G$ *çoxluğuna daxil olan, həm də daxil olmayan nöqtələr varsa, onda* $z_0$ *nöqtəsinə* $G$ *çoxluğunun sərhəd nöqtəsi deyilir.*

**Misal 2.23.** a) $z=0$ nöqtəsi $|z|>0$ çoxluğunun sərhəd nöqtəsidir;

b) $z=i$ nöqtəsi $|z|\le 1$ çoxluğunun sərhəd nöqtəsidir.

Sərhəd nöqtələri çoxluğu çoxluğun sərhədi adlanır və $\partial G$, $\Gamma, C, \Sigma$ və s. kimi işarə edilir. Sərhəd nöqtələri çoxluğu sonlu sayda nöqtədən və ya bir nöqtədən ibarət ola bilər ($|z|>0$ çoxluğunun bir sərhəd nöqtəsi var).

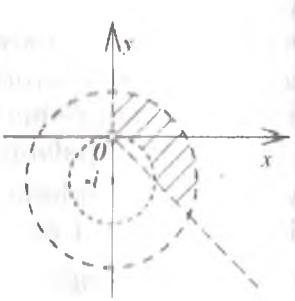
***Tərif.*** *$G$ çoxluğu ilə onun sərhədinin $\partial G$ birləşməsi çoxluğun qapanması adlanır və $\overline{G}=G\cup\partial G$ kimi işarə edilir.*

($|z|\le 1$ çoxluğu qapalı çoxluqdur). Genişlənmiş kompleks müstəvidə qapalı çoxluq kompakt çoxluq adlanır.

**Misal 2.24.** Aşağıdakı bərabərsizliklər sistemi ilə verilmiş çoxluğu təsvir edin.

$$\begin{cases} 1<|z+i|<2 \\ -\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

*Həlli.* Birinci bərabərsizliyə uyğun olan çoxluq mərkəzi $-i$ nöqtəsində və radiusları 1 və 2 olan halqadır və halqanın sərhədləri bu çoxluğa aid deyil. İkinci bərabərsizlik isə $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ (dördüncü rübün tənböləni)

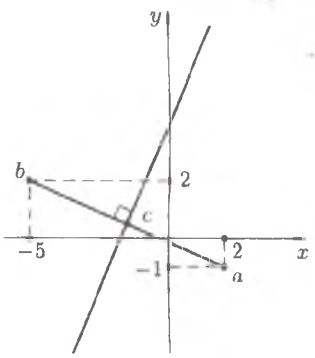


Şəkil 14.

və $\varphi = \frac{\pi}{2}$ şüaları (OY oxunun müsbət istiqaməti) arasında qalan nöqtələr çoxluğudur. Şüalar bu çoxluğa aid deyil. Deməli, axtarılan çoxluq verilmiş çoxluqların kəsişməsidir(şək. 14).

**Misal 2.25.** $|z-2+i| = |z+5-2i|$ bərabərliyini ödəyən nöqtələr çoxluğunu $z$ kompleks müstəvisində təsvir edin.

*Həlli.* Qeyd edək ki, $|z-z_0|$ ifadəsi $z$ və $z_0$ nöqtələri arasındakı məsafəni göstərir. Ona görə də verilmiş bərabərliyi belə də başa düşmək olar: $a = 2-i$ və $b = -5+2i$ nöqtələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələr çoxluğunu tapın. Məlumdur ki, $a$ və $b$ nöqtələrindən bərabər uzaqlıqda olan nöqtələr çoxluğu $ab$ parçasının ortasından ($c$ orta nöqtə) keçən və ona perpendikulyar olan düz xətdən ibarətdir. Parçanın orta nöqtəsinin koordinatları isə onun uyğun uc nöqtələrinin koordinatlarının cəminin yarısı kimi təyin edildiyindən yaza bilərik:

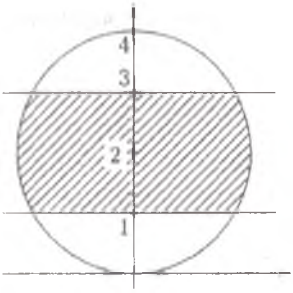


Şəkil 15.

$c = \frac{2-5}{2} + i\frac{-1+2}{2} = -\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$. Deməli, axtarılan nöqtələr çoxluğu $c = -\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$ nöqtəsindən keçən və $ab$ parçasına perpendikulyar olan düz xəttdir(şək.15).

**Misal 2.26.** Kompleks müstəvidə $\begin{cases} |z-2i| < 2 \\ 1 < \operatorname{Im} z < 3 \end{cases}$ bərabərsizlikləri ilə verilmiş nöqtələr çoxluğunu təsvir edin.

*Həlli.* $|z-2i| < 2$ bərabərsizliyi onu göstərir ki, $z$ nöqtəsindən $z_0 = 2i$ nöqtəsinə qədər olan məsafə 2-dən kiçikdir. Ona görə də $|z-2i| < 2$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğu mərkəzi $2i$ nöqtəsində və radiusu 2-yə bərabər olan dairənin daxilidir.



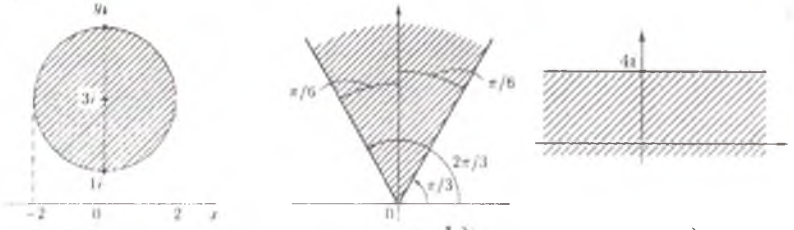
Şəkil 16.

$1 < \operatorname{Im} z < 3$ şərti isə onu göstərir ki, $z$ nöqtəsinin $y$ koordinatı 1 və 3 nöqtələri arasındadır. $z$ nöqtələr çoxluğu $y = 1$ və $y = 3$ üfiqi düz xətləri arasındakı zolaqdır. Deməli, axtarılan nöqtələr çoxluğu şəkildə göstərilmiş dairə ilə zolağın kəsişməsidir(şəkil 16).

**Misal 2.27.** Kompleks müstəvidə

$$\begin{cases} |z - 3i| < 2 \\ \left|\arg z - \dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{6} \\ \operatorname{Im} z < 4 \end{cases}$$

bərabərsizlikləri ilə verilmiş nöqtələr çoxluğunu təsvir edin.



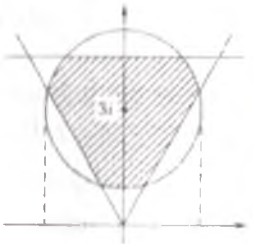

a) b) v)

Şəkil 17.

*Həlli.* $|z - 3i| < 2$ bərabərsizliyi onu göstərir ki, $z$ nöqtəsindən $z_0 = 3i$ nöqtəsinə qədər olan məsafə 2-dən kiçikdir. Ona görə də $|z - 3i| < 2$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğu mərkəzi $3i$ nöqtəsində və radiusu 2-yə bərabər olan dairənin daxilidir(şək. 17a)).

$\left|\arg z - \dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{6}$ bərabərsizliyi

$-\dfrac{\pi}{6} < \arg z - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{6}$ və ya $\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür. Bu bərabərsizliyi ödəyən nöqtələr çoxluğu OX oxu ilə uyğun olaraq $\dfrac{\pi}{3}$ və $\dfrac{2\pi}{3}$ bucaqları əmələ gətirən şüalar arasındakı nöqtələr çoxluğudur(şəkil 17b)).

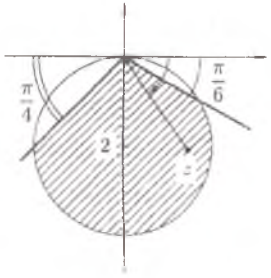



Şəkil 18.

$y = 4$ düz xəttinə aid olmayan və ondan aşağıda yerləşən yarımmüstəvidən ibarətdir(şək. 17v)). Deməli, axtarılan nöqtələr çoxluğu bu çoxluqların kəsişməsi olan «sivri» üçbucaq olacaqdır (şəkil 18). Bu üçbucağın sərhədləri verilmiş çoxluğa aid deyil.

**Misal 2.28.** Şəkildə verilmiş qapalı oblastı göstərən bərabərsizliklər sistemini yazın(şəkil 19).

**Həlli.** Göstərilən oblastın nöqtələr çoxluğu mərkəzi $z_0 = -2i$ nöqtəsində olan və radiusu 2-yə bərabər olan qapalı dairədən ibarətdir. Buna görə də $|z + 2i| \le 2$ bərabərsizliyini ödəyir. Bundan başqa, bu nöqtələr təpəsi koordinat başlanğıcı olan sektorun daxilində yerləşir. Yəni onların arqumentləri müəyyən şərti ödəyir. Ona görə də arqumentin baş qiymətindən $-\pi < \arg z \le \pi$ istifadə etmək əlverişlidir. Verilmiş çoxluğun nöqtələri üçün $\arg z$ OX oxundan saat əqrəbinin əksi istiqamətində hesablanır və deməli, mənfidir: $-\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\frac{\pi}{6}$. Beləliklə, axtarılan bərabərsizliklər sistemi aşağıdakı kimidir.



Şəkil 19.

$$\begin{cases} |z + 2i| \le 2 \\ -\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Biz $w = f(z)$ verilmişdir dedikdə, nəzərdə tuturuq ki, bu funksiya $z$ müstəvisinin $G$ çoxluğunu $w$ müstəvisinin $D$ çoxluğuna inikas etdirir.

Əgər $\forall z_1, z_2 \in G$ və $z_1 \ne z_2$ üçün $f(z_1) = w_1 \ne w_2 = f(z_2)$ olarsa, inikasa birqiymətli inikas deyilir və $G \leftrightarrow D$ kimi işarə edilir. Bu halda $G$ oblastı $f(z)$-in birvərəqlilik oblastı və $f(z)$ funksiyası $G$-də birvərəqli adlanır.

**Misal 2.29.** 1. $w = const$, $w = az + b$ -birqiymətli və birvərəqlidir; 2. $w = z^n$, $w = e^z$ – birqiymətli, ancaq bir vərəqli deyil; 3. $w = \sqrt{z}$ – birqiymətli deyil.

$G \leftrightarrow D$ olduqda $D$-də $z = \varphi(w)$ tərs inikas var və bu tərs inikas $D \to G$ kimi işarə edilir. Əgər $G \to D$ inikası birqiymətlidirsə və birvərəqli deyilsə, onda tərs funksiya haqqmda danışmaq olar, ancaq o bir vərəqli olmayacaq.

**Misal 2.30.** $f(z) = z^2$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələrini tapın.

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = u + iv$.

Deməli, həqiqi hissə $u(x,y) = x^2 - y^2$, xəyali hissə isə $v(x,y) = 2xy$ olar. Bu düsturlardan istifadə edərək $f(z) = z^2$ funksiyasının qiymətini $z = x + iy$ nöqtəsində hesablamaq olar.

Bəzi kompleks dəyişənli funksiyaların ifadəsini verək.

Üstlü funksiya: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Triqonometrik funksiyalar:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),\ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\ tgz = \frac{\sin z}{\cos z},\ ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Loqarifmik funksiya: $Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in Z$. $k = 0$ olduqda loqarifmik funksiyanın qiymətinə əsas qiymət deyilir və $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ kimi işarə edilir. Onda $Lnz = \ln z + 2\pi ki$.

## 3.1. Kompleks dəyişənli funksiyanın kəsilməzliyi

Əvvəlcə kompleks dəyişənli funksiyanın nöqtədə limiti anlayışını daxil edək.

***Tərif 1.*** *(Heyne mənada). Əgər* $\forall\{z_n\} \to z_0$ *üçün uyğun funksiyalar ardıcıllığı* $\{f(z_n)\} \to w_0$ *olarsa, onda deyirlər ki,* $w_0$ *kompleks ədədi* $f(z)$, $z \in G$ *funksiyasının* $z_0 \in G$ *nöqtəsində limitidir.*

**Qeyd.** $z_0 \in G$ nöqtəsi $G$ çoxluğunun limit nöqtəsidir.

***Tərif.*** *Əgər* $z_0$ *nöqtəsinin ixtiyari ətrafında* $G$ *çoxluğunun* $z_0$*-dən fərqli nöqtələri varsa, onda* $z_0$ *nöqtəsinə* $G$ *çoxluğunun limit nöqtəsi deyilir.*

**Tərif 1.** *(Koşi mənada) Əgər* $\forall \varepsilon > 0$ *üçün* $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ *varsa ki,* $|z - z_0| < \delta$ *olduqda* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ *olsun, onda* $w_0$ *kompleks ədədinə* $f(z)$, $z \in G$ *funksiyasının* $z_0$ *nöqtəsində limiti deyilir və belə işarə edilir:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

**Qeyd 1.** $0 < |z - z_0| < \delta$ çoxluğuna $z_0$ nöqtəsinin deşilmiş $\delta$ ətrafı deyilir; başqa sözlə, mərkəzi $z_0$ nöqtəsində və radiusu $\delta$ olan dairənin $z_0$ nöqtəsindən başqa daxili nöqtələri çoxluğu.

**Qeyd 2.** Limitin Heyne mənada tərifindən fərqli olaraq, bu tərifin həm $z_0$ və $w_0$-ın sonlu qiymətləri üçün mənası var.

***Teorem.*** *Heyne və Koşi mənada tərifləri ekvivalentdir.*

**İsbatı.** ▲2→1 (Koşi → Heyne). Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası tərif 2-ni ödəyir. $\forall \varepsilon > 0$ götürək və uyğun $\delta(\varepsilon) > 0$ seçək. İxtiyari $\{z_n\} \to z_0$ ardıcıllığına baxaq və $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $0 < |z_n - z_0| < \delta$ şərtini ödəyən $N(\varepsilon)$-nu tapaq. Tərif 2-yə görə $\forall n \geq N(\varepsilon)$ üçün $0 < |f(z_n) - w_0| < \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ və $\{z_n\} \to z_0$ ixtiyari olduğu üçün $\{f(z_n)\} \to w_0$. Yəni tərif 1 ödənir.

Analoji olaraq əksini də göstərmək olar▼.

Kompleks dəyişənli funksiyaların limitinin yuxarıdakı tərifləri həqiqi dəyişənli funksiyaların limitlərinin tərifinə analojidir. Ona görə də cəmin, hasilin, nisbətin və s. limitləri haqqında teoremlər də kompleks dəyişənli funksiyalar üçün qüvvədə qalır. Əgər $z = x + iy$ və $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olarsa, onda $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$ bərabərliyi $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a$; $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b$ bərabərliklərinə ekvivalentdir.

İndi də funksiyanın kəsilməzliyinin tərifini verək.

***Tərif.*** *Əgər* $f(z)$, $z \in G$ *funksiyasının* $z_0 \in G$ *nöqtəsində məhdud limiti varsa, yəni* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *və* $w_0 = f(z_0)$, *başqa sözlə,*

$\lim f(z) = f(z_0)$ *məhduddursa, onda deyirlər ki,* $f(z)$ *funksiyası* $z_0 \in G$ *nöqtəsində kəsilməzdir.*

Aydındır ki, $f(z)$ inikası $z_0 \in G$ nöqtəsinin kiçik $\delta$ ətrafını $w_0 = f(z_0))$ nöqtəsinin kiçik $\varepsilon$ ətrafına inikas etdirir.

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin $\varepsilon - \delta$ dilində tərifi: $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ varsa ki, $\forall z$ üçün $|z - z_0| < \delta$ olduqda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olsun, onda $f(z)$ kompleks dəyişənli funksiyasına $z_0 \in G$ nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

**Qeyd.** Bu tərif $G$ çoxluğunun həm daxili, həm də sərhəd nöqtələrinə aiddir.

***Tərif.*** $z_0$ *nöqtəsinin elə* $\varepsilon$ *ətrafı varsa ki, bu ətrafda* $G$*-nin* $z_0$*-dan başqa heç bir nöqtəsi yoxdur, onda* $z_0$ *nöqtəsinə* $G$*-nin izolə edilmiş nöqtəsi deyilir.*

**Qeyd 1.** Kəsilməzliyin tərifindən alınır ki, funksiya $z_0 \in G$ izolə edilmiş nöqtədə kəsilməzdir.

**Qeyd 2.** $f(z)$, $z \in G$ funksiyasının $z_0 \in G$ nöqtəsində kəsilməzlik anlayışı $z_0 = \infty$ sonsuz uzaqlaşmış nöqtə üçün də doğrudur.

Bu zaman Heyne mənada tərifdə $\{f(z_n)\}$ ardıcıllığında $\{z_n\}$ ardıcıllığına ixtiyari qeyri-məhdud artan ardıcıllıq kimi baxmaq lazımdır.

$\varepsilon - \delta$ dilində tərifdə isə $|z - z_0| < \delta$ şərti $|z| > R$ şərti ilə əvəz edilməlidir.

**Misal 2.31.** $w = az + b$; $w = z$; $w = const$; $w = \operatorname{Re} z$ və s. funksiyaları bütün kompleks müstəvidə kəsilməz funksiyalardır. $w = \arg z$ funksiyası $z = 0, z = \infty$ və həqiqi oxun müsbət yarım hissəsindəki nöqtələrdən başqa bütün kompleks müstəvidə kəsilməzdir.

***Tərif.*** $G$ *oblastının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan funskiya oblastda kəsilməzdir və bu belə işarə edilir:* $f(z) \in C(G)$

Analoji olaraq $f(z) \in C(\overline{G})$ və $f(z) \in C(\partial G)$ anlayışları müəyyən edilir.

Bu zaman Heyne mənada $z \in \overline{G}$ və ya $z \in \partial G$ çoxluqlarında kəsilməzliyin tərifində $\{z_n\}$ çoxluqlarının elementləri ancaq $z_n \in \overline{G}$ və ya $z_n \in \partial G$ çoxluqlarından olmalıdır.

### 3.2. Oblastda müntəzəm kəsilməzlik

***Tərif.*** *Əgər* $\forall \varepsilon > 0$ *üçün* $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *varsa ki,* $\forall z_1, z_2 \in G$ *üçün* $|z_1 - z_2| < \delta$ *olduqda* $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ *olsun, onda* $f(z)$, $z \in G$ *kompleks dəyişənli funksiyasına* $G$ *-də müntəzəm kəsilməz funksiya deyilir.*

$G$ -nin $\varepsilon$ qədər yaxın nöqtələri $D$ oblastının $\delta$ qədər yaxın nöqtələrinə inikas olunur.

Aydındır ki, funksiyanın müntəzəm kəsilməzliyindən onun kəsilməzliyi alınır. Tərsi, ümumiyyətlə, həmişə doğru deyil.

***Tərif.*** *Əgər çoxluq bütünlüklə müəyyən dairədə yerləşirsə, ona məhdud çoxluq deyilir, yəni* $\exists R > 0$ *və* $z_0 : G \subset \{z : |z - z_0| < R\}$.

Əgər kompakt çoxluq sonsuz uzaqlaşmış nöqtəni özündə saxlamırsa, onda o, məhdud çoxluqdur.

***Teorem 3.1.*** *Əgər* $f(z) \in C(G)$ *və* $\overline{G}$ *məhduddursa, onda* $f(z)$ *funksiyası* $\overline{G}$ *-də müntəzəm kəsilməzdir.*

*İsbatı.* ▲ (Əksini fərz edək). Tutaq ki, verilmiş $\varepsilon_0$ və $\forall \delta_n > 0$ üçün heç olmazsa iki $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}$: $|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}| < \delta_n$ varsa ki, $|f(z_1^{(n)}) - f(z_2^{(n)})| > \varepsilon_0$. $\delta_n \to 0$ olduqda alarıq ki, $\{z_1^{(n)}\}$ və $\{z_2^{(n)}\}$ ardıcıllıqları verilmiş bərabərsizlikləri ödəyirlər. Şərtə görə $\{z_1^{(n)}\}$ məhdud olduğundan ondan yığılan alt ardıcıllıq $\{z_1^{(n_k)}\} \to z_1$ seçmək olar. $\{z_2^{(n_k)}\}$ məhdud olduğundan ondan $\{z_2^{(n_l)}\} \to z_2$ olan ardıcıllığı seçmək olar. $\{z_1^{(n_l)}\} \to z_1$, $\delta_n \to 0$ olduğundan, onda $z_1 = z_2$ və fərziyyəmizə əsasən $|f(z_1) - f(z_2)| > \varepsilon_0$, bu isə $f(z)$ funksiyasının $G$ – də kəsilməz olmasına ziddir ▼.

Kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasını $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şəklində göstərmək mümkün olduğundan (burada $u(x, y)$ və

$v(x,y)$–həqiqi dəyişənli həqiqi funksiyalardır) aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem.*** *$f(z)$ funksiyasının $G$–də kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarının $(x,y)$ müstəvisinin $G$ oblastında dəyişənlərin külliyatına görə kəsilməz olmasıdır.*

Bu teorem «kompleks ədədlər ardıcıllığının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt onun həqiqi və xəyali hissəsi olan həqiqi ədədlər ardıcıllığının yığılan olmasıdır» hökmündən alınır.

## §4. Kompleks dəyişənli funksiyanın diferensiallanması

Kompleks dəyişənli funksiyanm törəməsi və diferensiallanması anlayışları həqiqi dəyişənli funksiyalarm törəməsi və diferensiallanması anlayışlarına analojidir.

Tutaq ki, $f(z) \in C(G)$. $f(z)$ funksiyasının arqumentin $\Delta z = z - z_0$ artımına uyğun artımını $\Delta f(z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ işarə edək.

***Tərif.*** *Əgər $\Delta z \to 0 (\Delta z = z - z_0)$ üçün aşağıdakı limit varsa və sonludursa, onda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyası $z_0 \in G$ nöqtəsində diferensiallanan (və ya monogen) funksiyadır:*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \overset{def}{=} f'(z_0)$$

Funksiyanın törəməsini $f'(z)$, $w'$, $\frac{dw}{dz}$ və ya $\frac{df}{dz}$ kimi işarə edirlər. Əgər yuxarıdakı limit yoxdursa, onda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyasının $z_0 \in G$ nöqtəsində törəməsi yoxdur.

***Tərif.*** *Əgər $f(z)$ funksiyası $z_0 \in G$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuşsa və onun artımı $\Delta f(z) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$ (burada $A$ ədədi $\Delta z$-dən asılı deyil, $\alpha(\Delta z)$ funksiyası $\Delta z \to 0$ olduqda sonsuz azalandır, yəni $\lim_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$) şəkilində göstərilə bilirsə, onda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyası $z_0 \in G$ nöqtəsində diferensiallanandır.*

$f(z)$ funksiyasının $z_0 \in G$ nöqtəsində diferensialı $df(z_0)$ kimi işarə edilir və $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ kimi hesablanır.

**Misal 2.32.** Törəmənin tərifindən istifadə edərək $w = z^2$ funksiyasının diferensiallanmasını tədqiq edin.

*Həlli.* $\Delta w = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2$ olduğundan alırıq ki,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z_0\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}(2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

Deməli, $w = z^2$ funksiyası istənilən $z_0$ nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi $f'(z_0) = 2z_0$ kimi hesablanır.

Kompleks dəyişənli funksiyanın diferensialı həqiqi dəyişənli funksiyanın diferensialına analoji təyin edildiyindən cəmin, fərqi, hasilin, nisbətin və mürəkkəb funksiyanın diferensialları haqqında teoremlər kompleks dəyişənli funksiyalar üçün də doğru qalır.

İlk baxışdan kompleks dəyişənli funksiyanın törəməsi həqiqi dəyişənli funksiyanın törəməsinə analoji olaraq təyin edilir.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Lakin kompleks arqumentin artımı $\Delta z$ nəinki $\Delta z$, həm də $\arg \Delta z$-in istiqamətindən asılıdır. Törəmə isə tərifə görə bu istiqamətdən asılı deyil. Ona görə kompleks dəyişənli funksiyanın törəməsi həqiqi dəyişənli funksiyanın törəməsindən əsaslı şəkildə fərqlənir.

***Teorem 4.1.*** *Əgər $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyası $z_0 \in G$ nöqtəsində diferensiallanan (monogen) funksiyadırsa, onda $z_0 \in G$ nöqtəsində $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$ və $v_y(x_0, y_0)$ xüsusi törəmələri var və onlar Koşi-Riman şərtləri adlanan şərtlərlə bağlıdırlar:*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

*İsbatı.* ▲ $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ işarə edək. Əgər limit varsa, onda o, $\Delta z \to 0$ üsulundan asılı deyil. Ona görə də əvvəlcə $\Delta z = \Delta x$ götürək. Onda alarıq:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} =$$

$$= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

$\Delta z = i\Delta y$ götürək. Onda alarıq:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta y} =$$

$$= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Bu iki bərabərliyin sol tərəfləri bərabər olduğundan, onda sağ tərəflər də bərabər olar. Kompleks ədədlərin bərabərliyi şərtindən alarıq:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0);\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Koşi–Riman şərtlərini aldıq. ▼

Tutaq ki, $f(z) \in C(G)$ və $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

***Teorem 4.2.*** *Əgər* $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ *nöqtə sində* $u(x, y)$ *v ə* $v(x, y)$ *funksiyalarının birinci tərtib diferensialı varsa və bu funksiyaların* $(x_0, y_0)$ *nöqtəsində xüsusi törəmələri Koşi-Riman şərtləri ilə bağlıdırlarsa, onda* $f(z)$ *funksiyası* $z_0 \in G$ *nöqtəsində diferensiallanan (monogen) funksiyadır.*

*İsbatı.* ▲Qeyd edək ki, birinci tərtib diferensialların varlığı o deməkdir ki, $\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(x, y)$; $\lim\limits_{|\Delta z| \to 0} \dfrac{\xi(x, y)}{|\Delta z|} = 0$.

Analoji olaraq yaza bilərik:

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y);\ \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta(x, y)}{|\Delta z|} = 0.$$

$\zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ işarə edək. Onda Koşi-Riman şərtlərini nəzərə almaqla yaza bilərik:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x\Delta x + u_y\Delta y + iv_x\Delta x + iv_y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{u_x\Delta x - v_x\Delta y + iv_x\Delta x + iu_x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z}$$

Burada limitə keçsək alarıq: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0)$ ▼.

**Qeydlər**. 1. Kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasının törəməsinin ekvivalent yazılış formaları:

$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) + iv_x(x,y) = u_x(x,y) - iu_y(x,y) =$
$= v_y(x,y) - iu_y(x,y)$

Teorem 4.2 teorem 4.1-in tərsi deyil.

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0)$ bərabərliyi $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ varsa ki, $\Delta z < \delta$ olduqda $\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ hökmü ilə eynigüclüdür. Buradan alınır ki, əgər $f(z)$ funksiyası $z_0 \in G$ nöqtəsində diferensiallanandırsa (monogendirsə), onda o, bu nöqtədə kəsilməzdir. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyil.

**Misal 2.33.** $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Koşi-Riman şərti istənilən nöqtədə ödəndiyi üçün tapırıq ki, $u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2$, $v_x(x,y) = 6xy$. Deməli,

$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x^2 + 2xyi - y^2) =$
$= 3(x + yi)^2 = 3z^2$

## 4.1. Kompleks dəyişənli analitik funksiya anlayışı

***Tərif.*** *Əgər $f(z) \in C(G)$ funksiyası $G$ çoxluğunun bütün nöqtələrində diferensiallanan (monogen) funksiyadırsa və $f'(z) \in C(G)$ kəsilməz törəmələr varsa, onda o bu oblastda analitikdir.*

Funksiyanın analitikliyi $f(z) \in C\infty(G)$ kimi işarə edilir.

***Teorem 1.*** *$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyasının $G$ oblastında analitik olması üçün zəruri və kafi şərt birinci tərtib kəsilməz törəmələrin $u_x, u_y, v_x, v_y$ varlığı və Koşi-Riman şərtlərinin ödənməsidir.*

*İsbatı.* ▲*Zərurilik.* $f(z) \in C\infty(G)$ şərtindən alınır ki, $f'(z) \in C(G)$. Buradan isə alınır ki, $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(G)$. Teorem 4.1-dən alınır ki, Koşi-Riman şərtləri ödənir.

*Kafilik.* $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(G)$ şərtlərindən alınır ki, $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyalarının birinci tərtib diferensialları var. Teorem 4.2-yə əsa-

sən $f'(z) \in C(G)$ var və $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$, $u_x(x,y), v_x(x,y)$ kəsilməz olduğundan $f'(z)$-də kəsilməzdir▼.

**Qeyd.** Gələcəkdə göstərəcəyik ki, $f(z) \in C\infty(G)$ olmasından $f'(z) \in C\infty(G)$ olması və ümumiyyətlə, $\forall n$ üçün $\exists f^{(n)}(z) \in C\infty(G)$ olması alınır.

### 4.2. Koşi-Riman şərtlərindən alınan nəticələr

1) Analitik funksiyanın həqiqi və xəyali hissəsi Laplas tənliyini ödəyir:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0;\ v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0.$$

Doğrudan da, Koşi-Riman $u_x = v_y, u_y = -v_x$ şərtlərinin birincisindən $x$-ə, ikincisindən isə $y$-görə törəmə alsaq və tərəf-tərəfə toplasaq $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$ bərabərliyinin, Koşi-Riman şərtlərinin birincisindən $y$-ə görə, ikincisindən isə $x$-ə görə törəmələr alsaq və tərəf-tərəfə toplasaq $v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0$ bərabərliyinin doğruluğunu alarıq.

***Tərif.*** *Laplas tənliyini* $(\Delta u = 0, \Delta v = 0)$ *ödəyən funksiyalara harmonik funksiyalar deyilir.*

Deməli, $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları həm harmonik olmalı, həm də Koşi-Riman şərtlərini ödəməlidirlər.

***Tərif.*** *Həm Laplas tənliyini, həm də Koşi-Riman şərtlərini ödəyən funksiyalara qarşılıqlı qoşma funksiyalar deyilir.*

Beləliklə, alırıq ki, analitik funksiyanın həm həqiqi, həm də xəyali hissəsi qoşma harmonik funksiyalardır.

2) Kompleks dəyişənli $z = \rho e^{i\varphi}$ analitik funksiyanın $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$ həqiqi və xəyali hissələri aşağıdakı münasibətlərlə bağlıdır:

$v_\varphi = \rho u_\rho;\ u_\varphi = -\rho v_\rho$.

3) $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ analitik funksiyasının modulu və arqumenti aşağıdakı münasibətləri ödəyir.

$R_x = R\Phi_y;\ R_y = -R\Phi_x$.

2) və 3)-ün doğruluğunu asanlıqla yoxlamaq olar. Bunu oxuculara həvalə edirik.

### 4.3. Analitik funksiyanın xassələri

1. Əgər $f(z) \in C\infty(G)$, onda $f(z) \in C(G)$.
2. Əgər $f(z) \in C\infty(G)$ və $g(z) \in C\infty(G)$, onda
$(f(z)+g(z)) \in C\infty(G)$, $(f(z)\cdot g(z)) \in C\infty(G)$,
$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \in C\infty(G)$, $g(z) \neq 0$.
3. Əgər $w = f(z) \in C\infty(G)$ funksiyası $z$ kompleks dəyişəninin analitik funksiyadırsa və deməli, onun qiymətlər çoxluğu $D$-də $w$ kompleks müstəvisində $\xi = \varphi(w) \in C\infty(D)$ analitik funksiyası təyin olunmuşdur, onda $z$ kompleks dəyişəninin funksiyası olan $F(z) = \varphi(f(z)) \in C\infty(G)$ funksiyası $G$ oblastında analitikdir.
4. Tutaq ki, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C\infty(G)$ və $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$. Onda $w_0 = f(z_0)$ nöqtəsinin ətrafında $z = \varphi(w) \in C\infty(|w - w_0| < \varepsilon)$ tərs analitik funksiyası təyin olunmuşdur və $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

*İsbatı.* ▲ Tərs funksiyanın varlığı üçün $u = u(x,y)$ və $v = v(x,y)$ tənliklərinin $w_0 = f(z_0)$ nöqtəsinin ətrafında $x, y$ dəyişənlərinə nəzərən həlli zəruridir. Başqa sözlə, bu tənliklər $x, y$ dəyişənlərini $u, v$ funksiyaları vasitəsilə qeyri-aşkar ifadə edir. Bunun üçün isə $z_0$ nöqtəsinin ətrafında $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$ şərtinin yerinə yetirilməsi kifayətdir. Koşi-Riman şərtlərini nəzərə alsaq, alarıq:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)| \neq 0.$$

$z = \varphi(w)$ tərs funksiyanın varlığı isbat edildi ▼.

$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}$ münasibətini qurmaqla və $f'(z_0) \neq 0$ şərtini nəzərə almaqla $\varphi'(w_0)$ – ın varlığını və kəsilməzliyini isbat etmək olar.

**5.** Tutaq ki, $x, y$ müstəvisinin birrabitəli $G$ oblastında $f(z)$ analitik funksiyasının həqiqi hissəsi olan $u(x, y)$ funksiyası verilmişdir. Onda bu funksiyanın xəyali hissəsi additiv sabit dəqiqliyi ilə müəyyən olunur.

*İsbatı.* ▲Koşi-Riman şərtlərinə əsasən naməlum $v(x, y)$ funksiyasının diferensialı $u(x, y)$ funksiyasına əsasən birqiymətli təyin olunur: $du = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$. Diferensial hesabından bilirik ki, iki dəyişənli funksiyanı onun tam diferensialına əsasən additiv sabit dəqiqliyi ilə təyin etmək olar▼.

**Misal 2.34.** Verilmiş həqiqi hissəyə $u = x^2 - y^2 + 2x$ malik analitik funksiyanı tapın.

Əvvəlcə asanlıqla yoxlayırıq ki, verilmiş funksiya Laplas tənliyini ödəyir, yəni harmonik funksiyadır. Daha sonra Koşi-Riman şərtlərindən tapırıq ki,

$$v_x = -u_y = 2y \text{ və } v_y = u_x = 2x + 2.$$

Bunlardan birincini $x$ – ə nəzərən inteqrallasaq alarıq:

$v = \int 2y dx = 2xy + \varphi(y)$, burada $\varphi(y)$ funksiyası $y$ dəyişənindən asılı ixtiyari funksiyadır.

$\varphi(y)$ funksiyasını müəyyən etmək üçün alınan bu sonuncu bərabərliyi $y$ dəyişəninə nəzərən diferensiallayıb, Koşi-Riman şərtlərini nəzərə alsaq, alarıq:

$v_y = 2x + \varphi'(y) = 2x + 2$; $\varphi'(y) = 2$ və $\varphi(y) = 2y + c$, burada $c$ ixtiyari sabitdir. Deməli, verilmiş $u(x, y)$ funksiyası ilə qoşma harmonik funksiya $v(x, y) = 2xy + 2y + c$ şəklindədir. Onda axtarılan analitik funksiya aşağıdakı kimi olar:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + c) =$$
$$= (x^2 + 2xyi - y^2) + (2x + 2yi) + c = (x + iy)^2 + 2(x + yi) + ci =$$
$$= z^2 + 2z + ci$$

6. $grad u = (u_x, u_y)$, $grad v = (v_x, v_y)$.

$(grad u, grad v) = u_x v_x + u_y v_y = -u_y v_y + u_y v_y = 0$. Belə ki, qradientin səviyyə xətlərinə perpendikulyar olmasından alınır ki, səviyyə xətləri ($u(x,y) = C$, $v(x,y) = C$) qarşılıqlı perpendikulyardır.

Sadə kompleks dəyişənli funksiyalara numunələr.

1. $f(z) = C$ funksiyası butun genişlənmiş kompleks müstəvidə analitikdir və $f'(z) = 0$.

2. $f(z) = az + b$ xətti funksiyası bütün kompleks müstəvidə analitikdir və $f'(z) = a$.

3. $f(z) = \frac{1}{z}$ funksiyası $z \neq 0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə analitikdir.

4. $f(z) = z^n$ funksiyası ($n$ – tam ədəddir) bütün kompleks müstəvidə analitikdir və $f'(z) = nz^{n-1}$.

5. $f(z) = \bar{z} = x - iy$ funksiyası analitik deyil. Çünki $u_x = 1 \neq v_y = -1$.

**Misal 2.35.** $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Koşi-Riman şərtlərindən alırıq ki, $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $v_x = 6xy$. Onda

$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x^2 + 2ixy - y^2) = 3(x + iy)^2 = 3z^2$.

**Misal 2.36.** Xəyali hissəsi $u(x,y) = 3x + 2xy$ olan və $f(-i) = 2$ şərtini ödəyən $f(z)$ analitik funksiyasını tapın.

*Həlli.* Əvvəlcə tapırıq ki, $v_y = 2x$ və $v_x = 3 + 2y$. Koşi-Riman şərtlərini nəzərə alsaq: $u_x = 2x$.

Onda bunlardan birincini $x$ – ə nəzərən inteqrallasaq alarıq: $u(x,y) = \int 2x dx = x^2 + \varphi(y)$, burada $\varphi(y)$ funksiyası $y$ dəyişənindən asılı ixtiyari funksiyadır.

$\varphi(y)$ funksiyasını müəyyən etmək üçün alınan bu sonuncu bərabərliyi $y$ dəyişəninə nəzərən diferensiallayıb, Koşi-Riman şərtlərini nəzərə alsaq alarıq:

$v_x = \varphi'(y) = -(3 + 2y)$ və inteqrallasaq

$\varphi(y) = -\int(3+2y)dy = -3y - y^2 + c$, burada $c$ ixtiyari sabitdir. Deməli, verilmiş $v(x,y)$ funksiyası ilə qoşma harmonik funksiya $u(x,y) = x^2 - 3y - y^2 + c$ şəklindədir. Onda axtarılan analitik funksiya aşağıdakı kimi olar:

$f(z) = x^2 - 3y^2 - y^2 + c + i(3x + 2xy)$.

Şərtə görə $f(-i) = 2$. Onda $x = 0$, $y = -1$. Ona görə də $f(-i) = 3 - 1 + c + i \cdot 0 = 2 + c = 2$. Buradan alırıq ki, $c = 0$.

Deməli,

$f(z) = x^2 - 3y^2 - y^2 + c + i(3x + 2xy) = x^2 - 3y^2 - y^2 + i(3x + 2xy) = z^2 + 3iz$.

## §5. Kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralı

### 5.1. Həqiqi dəyişənli kompleks funksiyanın inteqralı

Tutaq ki, $[a;b]$ parçasında həqiqi dəyişənli kompleks qiymətli $w = f(t) = x(t) + iy(t)$ funksiyası verilmişdir. $x(t), y(t) \in C[a;b]$. $f(t)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında müəyyən inteqralı aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt$$

Bu halda müəyyən inteqralın analoji xassələri öz doğruluğunu saxlayır.

1. $\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$

2. $\int_a^b (kf(t))dt = k\int_a^b f(t)dt$, $k = const$

3. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$,

4. $\int_a^a f(t)dt = 0$,

5. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$,

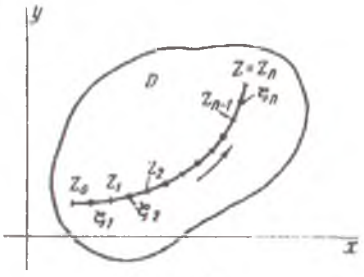
6. $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

## 5.2. Hissə-hissə hamar əyri

Bilirik ki, müstəvi üzərində hər bir əyri parametrik şəkildə $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a;b]$ tənlikləri ilə verilə bilər. Burada $x(t), y(t)$ funksiyaları həqiqi dəyişənli həqiqi funksiyalardır. Bu funksiyalar $x(t), y(t) \in C[a;b]$, yəni kəsilməzdirlər və $x'(t), y'(t)$ funksiyaları $[a;b]$ – də eyni zamanda sıfır deyillər, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. Onda bu əyriyə hamar əyri deyilir. Əgər əyri qapalıdırsa, onda $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$.

Sonlu sayda hamar qövslərdən ibarət əyriyə hissə-hissə hamar əyri deyilir.

Tutaq ki, $z$ müstəvisinin $D$ oblastında kəsilməz $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyası və başlanğıc nöqtəsi $z_0$, son nöqtəsi isə $z_n$ olan hissə-hissə hamar $C$ əyrisi verilmişdir(şək. 20). $C$ əyrisi həm açıq, həm də qapalı ola bilər. Qapalı olduqda $z_n = z_0$ olur. $C$ əyrisini $z_0$-dan $z_n$-ə doğru $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ nöqtələri vasitəsilə elementar qövslərə bölək: $z_k = x_k + iy_k$ (şəkil 20).



Şəkil 20.

$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 1,2,...,n$ işarə edək. $\Delta z_k$ vektoru $z_{k-1}$ nöqtəsindən $z_k$ nöqtəsinə doğru istiqamətlənmiş vektordur. $|\Delta z_k|$ -bu vektorun uzunluğudur. Hər bir elementar qövsün $((z_{k-1}; z_k))$ ixtiyari hissəsində uyğun olaraq $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ nöqtəsini götürək və aşağıdakı cəmi düzəldək:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} (v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k)$$

$|\Delta z_k|$ kəmiyyətlərinin ən böyüyünü $\max_{k=1,n}|\Delta z_k|$ ilə işarə edək. $\max_{k=1,n}|\Delta z_k| \to 0$ olduqda yuxarıdakı ifadə də sağ tərəfdəki cəmlərin hər biri sonlu limitə yığılır və bu limit $C$ əyrisinin elementar qövslərə ayrılması üsulundan və $\zeta_k$ nöqtələrinin seçilməsindən asılı deyil. Bu limitlər uyğun ikinci növ əyrixətli inteqrallara bərabərdir:

$$\int_C udx - vdy \text{ və } \int_C vdx + udy$$

$\max_{k=1,n}|\Delta z_k| \to 0$ olduqda sol tərəfdəki cəm də sonlu limitə yığılır və bu limit də $z_k$ və $\zeta_k$ nöqtələrinin seçilməsi üsulundan asılı deyil. Bu limitə $C$ əyrisi boyunca $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyasının kontur inteqralı deyilir və aşağıdakı kimi işarə edilir:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

***Tərif.*** *$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyasının $C$ əyrisi üzrə inteqralı elə bir kompleks ədəddir ki, bu ədədin həqiqi və xəyali hissəsi uyğun olaraq $f(z)$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələrinin II növ əyrixətli inteqralıdır:*

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

### 5.3. Kontur inteqralının xassələri

Kontur inteqralının qiyməti inteqrallama istiqamətindən asılıdır. Kontur üzrə hərəkət zamanı müsbət istiqamət o istiqamət qəbul edilir ki, kontur üzrə hərəkət zamanı oblast solda qalsın.

Müsbət istiqamətdə inteqrallamanı $\int_{C^+} f(z)dz$ kimi, ya da sadəcə olaraq $\int_C f(z)dz$ kimi işarə edirlər. Mənfi istiqamət üzrə inteqrallamanı isə $\int_{C^-} f(z)dz$ kimi işarə edirlər.

*Kontur inteqralının tərifindən alınan sadə xassələri:*

1. $\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$;

2. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, $k = const$;

3. $\int_C (f(z) + g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$.

4. $\int_{C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)dz$

5. $\left|\int_C f(z)dz\right| = \int_C |f(z)|ds \le ML_C$, burada $|f(z)| \le M$, $\int_C ds = L_C$ – konturun uzunluğudur.

6. Parametrə görə inteqralın hesablanması:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

**Misal 2.37.** $\int_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0} = \begin{Bmatrix} z = z_0 + R_0 e^{i\varphi} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dz = iR_0 e^{i\varphi} d\varphi \end{Bmatrix} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$.

Nəticə nə $R_0$ dan, nə də $z_0$ – dan asılı deyil.

7. Dəyişənin əvəz edilməsi. Tutaq ki, $\exists \varphi(\xi)$ var ki, $z = \varphi(\xi)$ funksiyası $C$ konturunu $\xi$ müstəvisində $\Gamma$ konturuna inikas etdirir və $\varphi(\xi) \in C^\infty(D)$ funksiyası $D$ oblastında birvərəqlidir, $D$ oblastı $\xi$ müstəvisində yerləşir və $\Gamma$ konturunu öz daxilinə alır. Onda

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi.$$

## §6. Koşi teoremi

### 6.1. Köməkçi anlayışlar. Qrin düsturu

1. ***Tərif.*** *Əgər $x, y$ müstəvisinin $G$ oblastı üçün bütün daxilə çəkilmiş çoxbucaqlıların sahələri çoxluğunun Sup $(P_1)$, bütün xaricə çəkilmiş çoxbucaqlıların sahələri çoxluğunun İnf $(P_2)$-na bərabərdirsə, yəni $P_1 = P_2$ olarsa, onda $G$ oblastına Jordan mənada ölçülə bilən oblast deyilir. $P_1 = P_2 = P$-yə $G$ oblastının Jordan mənada sahəsi deyilir.*

Oblastın ölçülə bilən olmasının kafi şərti oblastın sərhədinin hissə-hissə hamar olmasıdır.

2. Ölçülə bilən $G$ oblastında hissə-hissə kəsilməz $f(x,y) \in C(G)$ və məhdud olan $|f(x,y)| \le A$ funksiyası üçün $\iint_G f(x,y)dxdy$ inteqralı var və bu inteqral uyğun inteqral cəmləri ardıcıllığının limitidir.

3. ***Tərif.*** *Əgər $G$ oblastı üçün müstəvinin ixtiyari qapalı əyri ilə məhdudlaşmış hissəsi bütünlüklə $G$-yə daxildirsə, onda $G$-yə birrabitəli oblast deyilir.*

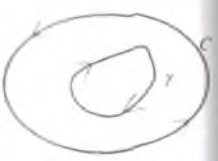
4. **Qrin düsturu.** Tutaq ki, $P(x,y), Q(x,y) \in C(\bar{G})$, $\partial G$ isə hissə-hissə hamar konturdur və $P_x, P_y, Q_x, Q_y \in C(G)$. Onda

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G (Q_x - P_y)dxdy .$$

### 6.2. Koşi teoremi. Çoxrabitəli oblast halı

**Koşi teoremi.** *Əgər $f(z) \in C\infty(G)$ və $G$ birrabitəli oblastdırsa, onda ixtiyari qapalı $\gamma \subset G$ konturu üçün*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$



Şəkil 21.

*İsbatı.* ▲

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i\int_{\gamma} vdx + udy \overset{Q.d}{=}$$

$$\overset{Q.d}{=} \iint_{G}(-v_x - u_y)dxdy + i\iint_{G}(u_x - v_y)dxdy \overset{K-R}{=}$$

$$\overset{K-R}{=} \iint_{G}(u_x - u_y)dxdy + i\iint_{G}(v_x - v_y)dxdy = 0 \blacktriangledown.$$

**Qeyd.** Oblastın birrabitəli oblast olması şərti vacib şərtdir. Məsələn, $G$ oblastı dairəvi $1<|z|<3$ halqası olan hal üçün $f(z)=\frac{1}{z}\in C\infty(G)$ funksiyasını götürsək, görərik ki, $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$.

Bu, onunla bağlıdır ki, $|z|=2$ konturu $f(z)$ funksiyasının tam analitiklik oblastının sərhədini əmələ gətirmir.

***Tərif.*** *Əgər $f(z)\in C(G)$ funksiyası $G$ oblastının bütün nöqtələrində analitikdirsə, onda $G$ – yə funksiyanın analitiklik oblastı deyilir.*

***Tərif.*** *Əgər $f(z)\in C\infty(G)$ və $f(z)\in C(\overline{G})$, yəni $f(z)\in C(\partial G)$ olarsa, onda deyirlər ki, $f(z)$ funksiyası $\overline{G}$ qapalı oblastında analitikdir $f(z)\in C\infty(\overline{G})$.* Tərif çoxrabitəli oblast halı üçün də doğrudur.

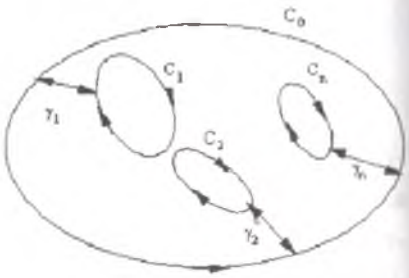
***Koşi teoremi (ikinci).*** *Əgər $f(z)\in C\infty(\overline{G})$ və $G$ birrabitəlidirsə, onda $\int\limits_{\partial G} f(z)dz=0$.*

Teorem çoxrabitəli oblast halı üçün aşağıdakı kimidir.

**Teorem.** *Tutaq ki, $f(z)\in C\infty(G)$, $G$ çoxrabitəlidir, xaricdən $C_0$, daxildən isə $C_1,C_2,...,C_n$ konturları ilə məhduddur və tutaq ki, $f(z)\in C\infty(\overline{G})$. Onda $\int\limits_{C} f(z)dz=0$, burada $C$ əyrisi $G$ oblastının tam sərhədidir və $C=C_0\cup C_1\cup C_2\cup...\cup C_n$, istiqamət müsbətdir.*

*İsbatı.*▲ $C_0$ konturunu $C_1,C_2,..,C_n$ konturları ilə birləşdirən və birbiri ilə kəsişməyən hamar $\gamma_1,\gamma_2,..,\gamma_n$ əyrilərini çəkək(şək. 22). Onda $C_1,C_2,...,C_n$ konturları və $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ əyriləri ilə məhdudlaşmış

oblast birrabitəli olar. Belə ki, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ əyriləri ilə hərəkət iki istiqamətlidir. Koşi teoreminə (II teorem) görə bu oblast üzrə inteqral sıfra bərabərdir. Ancaq $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ əyriləri üzrə hərəkət iki istiqamətli olduğundan cəmləmədə onların cəmi sıfra bərabər olar. Ona görə də



Şəkil 22.

$$\int_{C_0^+} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + ... + \int_{C_n^+} f(z)dz = 0 \blacktriangledown.$$

### 6.3. Kompleks dəyişənli funksiyanın qeyri-myəyyən inteqralı

1. Əgər $G$ –birrabitəli və $f(z) \in C\infty(G)$, onda $\forall z_1, z_2 \in G$ üçün $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi$ inteqralı inteqrallama yolundan asılı deyil. Qeyd olunmuş $z_0 \in G$ üçün $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z)$ funksiyası yalnız $z$ dəyişəninin funksiyasıdır.

2. *Qeyri-müəyyən inteqral.* Tutaq ki, $G$ –birrabitəli oblastdır, $f(z) \in C(G)$, ixtiyari qapalı $\gamma \subset G$ konturu üçün $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Onda $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z)$ funksiyasına $f(z)$ funksiyasının *qeyri-müəyyən inteqralı* deyilir.

*$F(z)$ funksiyasının xassələri.*

**Teorem 1.** *Əgər $G$ birrabitəli, $f(z) \in C(G)$ və ixtiyari qapalı $\gamma \subset G$ konturu üçün $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Onda $F(z)$ funksiyası var və $F(z) \in C\infty(G)$.*

*İsbatı.* ▲

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - f(z)\right| = \left\{\int_{z}^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z\right\} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\xi) - f(z))d\xi\right| \le \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}\max_{\xi\in[z;z+\Delta z]}|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$$

$|\Delta z| < \delta$ olduqda.

Buradan alırıq ki, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z) = f(z) \in C(G)$. Bu isə o deməkdir ki, $F(z) \in C\infty(G)$. ▼

## 6.4. Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

I. *İbtidai funksiya anlayışı.* Tutaq ki, $f(z) \in C(G)$. Onda $F(z) \in C\infty(G)$ və $F'(z) = f(z)$ şərtini ödəyən ixtiyari $F(z)$ funksiyası $f(z)$ funksiyasının $G$-də ibtidai funksiyasıdır.

**Qeydlər:**

1. $F(z)$ –qeyri-müəyyən inteqralı birrabitəli $G$ oblastında $f(z)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.
2. Əgər $F(z)$ ibtidai funksiyası varsa, onda onlar sonsuz saydadır və bir-birindən additiv sabitlə fərqlənirlər:

$F_1'(z) - F_2'(z) = 0 \Rightarrow F_1(z) = F_2(z) + C$

II. *Nyuton-Leybnits düsturu.* Əgər $G$-birrabitəli, $f(z) \in C(G)$ və ixtiyari qapalı $\gamma \subset G$ konturu üçün $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ olarsa, onda $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$, burada $F(z)$ funksiyası $f(z)$ funksiyasının ixtiyari ibtidai funksiyasıdır.

III. *Sonlu artım düsturu*, ümumiyyətlə, doğru deyil.

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$; $c \in (a;b)$.

IV. *Koşi-Adamar düsturu.* Tutaq ki, $G$ -birrabitəli, $f(z) \in C\infty(G)$ və ixtiyari qapalı $\gamma \subset G$ konturu üçün $\int_{\gamma} f(\xi)d\xi = 0$.

Onda $\int_{z}^{z+\Delta z} f'(\xi)d\xi = f(z+\Delta z) - f(z)$.

İnteqrallama yolu kimi $z$ və $z+\Delta z$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasını götürsək, alarıq: $\xi = z + \Delta z\theta$; $0 \le \theta \le 1$; $d\xi = \Delta z d\theta$.

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta z \int_0^1 f'(z+\Delta z\theta)d\theta$$ ***-Koşi-Adamar düsturu.***

V. Analitik funksiyanın inteqralını hesablayarkən inteqrallama konturunu funksiyanın analitiklik oblastından çıxmamaq şərti ilə istənilən formada deformasiya etmək olar. İnteqrallama konturunu Koşi teoreminin imkan verdiyi şəkildə dəyişməklə bir sıra inteqralları asanlıqla hesablamaq olar.

**Misal1 2.38.** 23-cü şəkildə təsvir olunmuş kontur üzrə $\int_C \frac{dz}{z}$ inteqralını hesablayın.

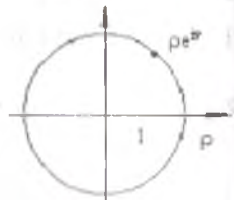


Şəkil 23.

Diqqət yetirsək görərik ki, kontur heç bir düsturla verilməyib. Vacib olan onun başlanğıc və son nöqtələrinin verilməsi və koordinat başlanğıcını neçə dəfə dolanmasıdır.

Biz konturu elə deformasiya etməliyik ki, inteqralı asanlıqla hesablamaq mümkün olsun.

Qeyd etmək lazımdır ki, inteqralı aşağıdakı iki tip kontur üzrə asanlıqla hesablamaq olar: birinci -həqiqi ox boyunca: $dz = dx$, $\int_1^x \frac{dz}{z} = \ln x, (x > 0)$; ikinci –mərkəzi $z = 0$ nöqtəsində və radiusu $\rho$ olan çevrə qövsu boyunca. Bu çevrədə $z = \rho e^{i\theta}$, $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$. $\int \frac{dz}{z} = i\int d\theta$, burada $\rho, \varphi$ -polyar koordinatlardır. Onda konturu sağda göstərilmiş kimi deformasiya etsək, yəni radiusu çev-



Şəkil 24.

ro boyunca iki dəfə və $\varphi$ radian bucaq qədər keçid etsək, alarıq ki, inteqral $\ln\rho + 4\pi + i\varphi$ -yə bərabər olar(şək. 24).

## §7. Koşi inteqralı

### 7.1. Koşinin inteqral düsturu

Tutaq ki, $f(z)\in C\infty(\overline{G})$. $f(z_0)$, $z_0 \in G$ funksiyasını onun $\partial G$ – dəki qiymətləri ilə ifadə etmək tələb olunur. $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki, $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0} \in C\infty(\overline{G} \setminus z_0)$. Ona görə də, əgər $G$ oblastında $z_0$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan qapalı $\gamma$ konturunu götürsək, onda $\varphi(z)$ qapalı $\gamma$ konturu və $\partial G$ arasındakı birrabitəli $G^*$ oblastında analitik olar. Çoxrabitəli oblast üçün Koşi teoreminə görə $\varphi(z)$ funksiyasının $\partial G \cup \gamma$ konturu üzrə inteqralı sıfra bərabər olar.

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = 0; \quad \int_{\gamma^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = -\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

olduğundan alarıq ki,

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \int_{\gamma^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi .$$

Bərabərliyin sol tərəfindəki inteqral konturun seçilməsindən asılı deyil. Ona görə də sağ tərəfdəki inteqral da bu xassəyə malikdir. Belə olduqda inteqrallama konturu əvəzinə mərkəzi $z_0$ nöqtəsində və radiusu $\rho$ olan $\gamma_\rho$ çevrəsini götürmək əlverişlidir. $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $d\xi = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \int_{\gamma^*} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = i \int_0^{2\pi} f(\xi) d\varphi =$$

$$= i \int_0^{2\pi} [f(\xi) - f(z_0)] d\varphi + i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi = I + 2\pi i f(z_0) \qquad (1)$$

$I$-ni qiymətləndirək. $|I| \le 2\pi \max_{\xi \in \gamma_\rho} (f(\xi) - f(z_0))$.

$\rho \to 0$ olduqda $\xi(\rho) \to z_0$ olar. $f(z)$ funksiyası $G$ – də analitik və deməli, kəsilməz olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ var ki, $|\xi(\rho) - z_0| < \delta$ olmasından $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$ alınır. Bu isə o deməkdir ki, $\rho \to 0$ olduqda $I \to 0$ olar.

(1) bərabərliyinin sol tərəfi və sağdakı ikinci toplanan $\rho$ –dan asılı olmadığından limitə keçsək alarıq.

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$. Bu düstur ***Koşinin inteqral düsturu*** adlanır.

**Qeydlər:**

1. Bu düstur həm birrabitəli, həm də çox rabitəli oblast üçün doğrudur. Çoxrabitəli oblast halında $\partial G$ oblastın müsbət istiqamətdə keçidi olan tam sərhədidir.

2. $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ şəkilində inteqral $z_0$ nöqtəsinin kompleks müstəvidə $z_0 \notin \partial G$ şərti gözlənilməklə istənilən vəziyyəti üçün doğrudur.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in G \\ 0, & z_0 \notin G \end{cases}$$

3. Koşinin inteqral düsturu istənilən $z_0 \in C' \subset G$ konturu üçün doğrudur.

### 7.2. Orta qiymət düsturu. Modulun maksimumluq prinsipi

*a) Orta qiymət düsturu.*

Tutaq ki, $f(z) \in C\infty(G)$ və $z_0 \in G$ nöqtəsi birrabitəli $G$ oblastının daxili nöqtəsidir. Mərkəzi $z_0$ nöqtəsində və radiusu $R$ -ə bərabər olan və bütünlüklə $G$ -də yerləşən çevrə götürək. Onda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = \left(\xi = z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} f(\xi)ds,\ ds = Rd\varphi$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} f(\xi)ds$$ -bu düstur ***orta qiymət*** düsturudur.

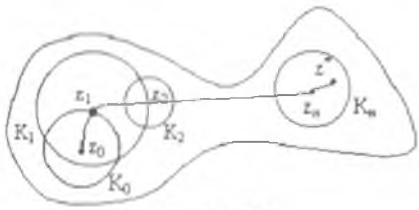
*b) Modulun maksimumluq prinsipi.*

Əgər $f(z) \in C\infty(\overline{G})$ və $f(z) \neq const$, onda $|f(z)|$ funksiyası özünün maksimumunu ancaq $\partial G$ sərhədində alır.

*İsbatı.* ▲(əksini fərz etməklə).

Tutaq ki, $\exists z_0 \in G:\ |f(z_0)| = M \geq |f(z)|,\ \forall z \in \overline{G}$.

$M = \left|\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_0} f(\xi)ds\right| \leq \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_0}|f(\xi)|ds \leq M$. Buradan alınır ki, $\frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_0}|f(\xi)|ds = M$. $C_0$ mərkəzi $z_0$ nöqtəsində və radiusu $R_0$ olan çevrədir. $|z - z_0| = R_0$, $C_0 \subset G$, $\xi = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$, $ds = R_0 d\varphi$ nəzərə alsaq: $|f(\xi)| = M$, $\forall \xi \in C_0$ üçün. Doğrudan da, $|f(\xi)| \leq M$, $\forall \xi \in C_0$ üçün, fərziyyəmizə görə. İndi fərz edək ki, hər hansı $\xi_0 \in C_0$ nöqtəsində $|f(\xi_0)| < M$ ödənir. Onda $f(\xi)$ funksiyası $C_0$-da kəsilməz olduğundan uzunluğu $L_0$ olan $\gamma_0$ qövsü var ki, $\xi_0 \in \gamma_0$ üçün $|f(\xi)| \leq M - \varepsilon, \varepsilon > 0$ (çevrənin qalan hissəsində $\forall \xi \in C_0 / \gamma_0$ üçün $|f(\xi)| = M$). Onda



Şəkil 25.

$$M = \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_0}|f(\xi)|ds = \frac{1}{2\pi R_0}\int_{\gamma_0}|f(\xi)|ds + \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_0/\gamma_0}|f(\xi)|ds \le$$

$$\le \frac{(M-\varepsilon)L_0}{2\pi R_0} + \frac{M(2\pi R_0 - L_0)}{2\pi R_0} = M - \frac{\varepsilon L_0}{2\pi R_0} < M$$ . Buradan isə alırıq ki, $M < M$ . Bu isə ola bilməz. Deməli, $|f(\xi)| = M$ , $\forall \xi \in C_0$ üçün. Buradan isə alarıq ki, $|f(\xi)| = M$ ($\xi \in C'$, $z - z_0 = R' < R_0$). Deməli, $|f(\xi)| = M$ ($\xi \in K_0$, $|z - z_0| \le R_0$). Buradan alırıq ki, $|f(z^*)| = M$ , $\forall z^* \in G$ . Bunu göstərək. $z_0$ və $z^*$ nöqtələrini $\partial G$ sərhədindən ən azı $d > 0$ məsafəsində olan $L \subset G$ əyrisi ilə birləşdirək(şək. 25). $z_1 = C_0 \cap L$ götürək. $|f(z_1)| = M$ olduğundan $|f(\xi)| = M$ , $\xi \in K_1$: $|z - z_1| \le R_1$, $R_1 \ge d$ olar. $z_2 = C_1 \cap L$ götürək və bu prosesi davam etdirsək sonlu sayda addımdan sonra alarıq ki, $|f(\xi)| = M$ , $\xi \in K_n$: $|z - z_n| \le R_n$ və $z^* \in K_n$, Beləliklə, əgər $|f(z)|$ maksimum qiymətini oblastın daxili nöqtəsində alırsa, onda bütün oblastda $|f(z)| \equiv M$ .

Koşi-Riman şərtlərindən $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ analitik funksiyasının modulu və arqumenti üçün $R_x = R\Phi_y$ ; $R_y = -R\Phi_x$ münasibətlərindən alırıq ki, $|f(z)| = const$ , $\forall z \in G$ . Bu isə şərtə ziddir. Beləliklə, isbat etdik ki, əgər $|f(z)| \ne const$ , onda o öz maksimum qiymətini daxili nöqtələrdə ala bilməz. Ancaq $|f(z)|$ funksiyası $\overline{G}$-də kəsilməz olduğundan, onda o, maksimum qiymətini hər hansı $z \in \overline{G}$ nöqtəsində almalıdır. Deməli, $|f(z)|$ max qiymətini sərhəd nöqtələrində alır ▼.

**Qeydlər:**

1. Əgər $f(z) \in C\infty(\overline{G})$ və $f(z) \ne 0, \forall z \in \overline{G}$, onda modulun minimumluq prinsipi doğrudur. İsbat etmək üçün $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiyasına baxmaq və modulun maksimumluq prinsipindən istifadə etmək kifayətdir.

2. Teorem həm birrabitəli, həm də çoxrabitəli oblast üçün doğrudur.

3. Həndəsi interpretasiya: analitik funksiyanın həqiqi və xəyali hissələri olan iki həqiqi dəyişənli $u(x,y)$ və $v(x,y)$ funksiyaları $G$-də lokal ekstrumumları yoxdur, ancaq yəhər nöqtələrinə malik ola bilər. Bu funksiyaların səviyyə xətləri qapalı deyil, başqa sözlə, ya $G$ oblastının sərhədinə çatır, ya da qeyri-məhdud oblast halında sonsuzluğa uzanır. $G$ oblastının daxilində bu funksiyaların bütün istiqamətlərdə ya artma, ya da azalma nöqtələri yoxdur.

## § 8. Koşi tipli inteqral və onun xassələri

### 8.1. Koşi tipli inteqral

Tutaq ki, $C$ -uzunluğu $L$ olan hissə-hissə hamar əyridir: $\int_C ds = L$ və $f(\xi)$ ixtiyari $\xi \in C$ nöqtəsində kəsilməzdir. Onda $z \notin G$ olduqda $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ funksiyası var. Bu ***inteqrala Koşi tipli inteqral*** deyilir.

**Teorem 8.1**. *$\forall z_0 \notin C$ nöqtəsində $F(z_0)$ diferensiallanandır və*

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi .$$

*İsbatı.* ▲Tutaq ki, $z_0, z_0 + \Delta z \notin C$. Onda $z_0 \notin C$ olduğundan, $\exists \delta_0 > 0$ və $d_0 > 0$ var ki, $|z - z_0| < \delta_0$ qapalı dairəsi $C$ konturundan sonlu məsafədə $d_0 > 0$ yerləşəcəkdir. Tutaq ki, $|\Delta z| < \delta_0$. Onda $\forall \xi \in C : |\xi - z_0| > d_0 ; |\xi - z_0 - \Delta z| > d_0$.

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\Delta z}\int_C f(\xi)\left\{\frac{1}{\xi - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right\} d\xi -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C f(\xi)\left\{\frac{1}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^2}\right\} d\xi\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0 - \Delta z)(\xi - z_0)^2}\,d\xi\right| \le \frac{\max\limits_{\xi\in C}|f(\xi)|\,|\Delta z|L}{2\pi d_0^3} < \varepsilon$$

$|\Delta z| < \delta < \delta_0$ olduqda alarıq ki,

$$\exists \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z} = F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\,d\xi \ \blacktriangledown.$$

**Qeyd.** $F'(z)$, $z \notin C$ funksiyasının kəsilməzliyi analoji olaraq $|\Delta F'(z)|$ qiymətləndirilməsinin köməyi ilə isbat edilir.

**Teorem 8.2.** *$z \notin C$ olduqda $F(z) \in C\infty(E \setminus C)$* (Artıq isbat edilib).

## 8.2. Kompleks dəyişənli funksiyanın bütün tərtibdən törəmələrinin varlığı

***Teorem 8.3.*** *$z \notin C$ olduqda $F(z)$ funksiyasının ixtiyari $n$ üçün bütün tərtibdən kəsilməz törəmələri var və*

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi.$$

Bu teorem riyazi induksiya metodu vasitəsilə isbat edilir.

***Teorem 8.4.*** *(Əsas). Əgər $f(z) \in C\infty(G)$, onda $\forall n$ və $\forall z \in G$ üçün $\exists f^{(n)}(z) \in C\infty(G)$.*

*İsbatı.* ▲Tutaq ki, $z_0 \in G$. $z_0$ nöqtəsini özündə saxlayan və $G$-də qalmaqla $z_0$-a sıxıla bilən $C$ konturunu quraq. Onda Koşinin inteqral düsturuna görə $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\,d\xi$. Bu, isə Koşi tipli inteqraldır. $\exists f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$. Buradan alınır ki, $f^{(n)}(z) \in C\infty(G)$, $\forall z_0 \in G$ ▼.

Beləliklə, əgər $F(z)$ funksiyası $G$-də analitikdirsə, onda onun $G$-də bütün tərtibdən kəsilməz törəmələri var. Bu, kompleks dəyişənli funksiyanı həqiqi dəyişənli funksiyadan fərqləndirən əsas

xüsusiyyətdir. Belə ki, həqiqi dəyişənli funksiyanın birinci tərtib kəsilməz törəməsinin müəyyən oblastda varlığından, ümumiyyətlə, yüksək tərtibli törəmələrinin varlığı çıxmır. Məsələn, $y(x) = x|x|$ bütün ədəd oxunda kəsilməzdir, onun törəməsi $y'(x) = 2|x|$ də eləcə kəsilməzdir, ancaq $y''(x)$ yoxdur.

## 8.3. Morer və Liuvill teoremləri

***Morer teoremi.*** *Əgər* $f(z) \in C(G)$, $G$*-birrabitəli oblast və* $\forall \gamma \subset G : \int_{\gamma} f(z)dz = 0$, *onda* $f(z) \in C\infty(G)$.

*İsbatı.* ▲Teoremin şərtləri daxilində $\exists F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \in C\infty(G)$ (6.3-də teorem 1-ə əsasən ) $z_0$ və $z$ nöqtələri $G$-nin ixtiyari nöqtələridir.

İnteqral isə bu nöqtələri birləşdirən və $G$-yə daxil olan ixtiyari kontur üzrə götürülür. Belə ki, $F'(z) = f(z)$. Lakin analitik funksiyanın törəməsi də analitik olduğundan (teorem 8.4), yəni $F''(z) \in C(G)$. Deməli, $F''(z) = f'(z) \in C(G)$.▼

**Qeydlər:**

1. Morer teoremi müəyyən mənada Koşi teoreminin tərsidir.
2. Teorem 8.4 və Morer teoremi çoxrabitəli oblast üçün də doğrudur.

***Liuvill teoremi.*** *Əgər* $f(z) \in C\infty(E)$ *və* $f(z) \neq const$, *onda* $z \to \infty$ *olduqda* $|f(z)| \to \infty$.

*Liuvill teoreminin digər ifadəsi:*

*Əgər* $f(z) \in C\infty(E)$ *və* $\exists M : |f(z)| \leq M$, $\forall z$ *üçün (*$|f(z)|$ *müntəzəm məhduddur), onda* $f(z) \equiv const$

*İsbatı.* ▲ $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$, burada $C_R : |\xi - z| = R$. Teoremin hökmünə əsasən $\exists M : |f(z)| \leq M$ var və $R$ – dən asılı deyil.

$|f'(z)| \le \frac{2\pi RM}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}$. Belə $R$-i kifayət qədər böyük ($R \to \infty$) seçmək olar, $f'(z)$ isə $R$-dən asılı deyil. Onda bütün kompleks müstəvidə $|f'(z)| = 0$. $z$ ixtiyari olduğundan $|f'(z)| = 0$-bütün $E$ kompleks müstəvidə. Deməli, $\forall z$ üçün $f(z) \equiv const$. ▼

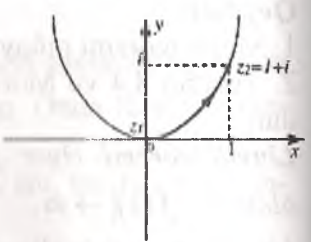
*Tərif. Əgər* $f(z) \in C\infty(E)$ *(*$E$*-bütün kompleks müstəvi)* ($z \neq \infty$), *onda* $f(z)$*funksiyasına tam funksiya deyilir.*

Sabit olmayan tam funksiya mütləq qiymətcə məhdud ola bilməz. Məsələn, $\sin z$ və $\cos z$ funksiyaları tam funksiyalardır və modulca qeyri-məhduddurlar.

Qeyd edək ki, kompleks dəyişənli funksiyaların inteqrallarını hesablayarkən, həqiqi dəyişənli funksiyaların inteqrallarını hesablayan zaman istifadə etdiyimiz dəyişəni əvəzetmə və hissə-hissə inteqrallama üsullarından istifadə etmək olar.

Eləcə də qeyd edək ki, inteqrallama yolu $z_0$ nöqtəsindən çıxan şüadırsa və ya mərkəzi $z_0$ nöqtəsində olan çevrənin hissəsidirsə, onda $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ əvəzləməsini aparmaq məqsədəuyğundur. Birinci halda $\varphi = const$, $\rho$ isə həqiqi inteqrallama dəyişəni olar. İkinci halda $\rho = const$, $\varphi$ isə həqiqi inteqrallama dəyişəni olar.

**Misal 2.39.** $\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz$ inteqralını hesablayın. $C$ – konturu $y = x^2$ parabolasının qolu üzərində $z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirir(şək.26).



Şəkil 26.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiyanı aşağıdakı kimi yazaq:

$f(z) = 1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$.

Onda $u = 1 - 2x$; $v = 1 + 2y$ və $dz = dx + idy$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int_C (1 + 2y)dx - (1 - 2x)dy$$

$y = x^2$, onda $dy = 2xdx$, $x \in [0;1]$. Nəticədə alırıq:

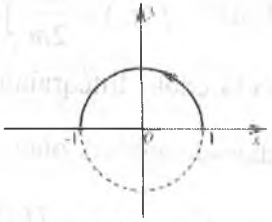
$$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + i\int_C (1+2y)dx - (1-2x)dy =$$

$$= \int_0^1 ((1-2x) - (1+2x^2)2x)dx + i\int_0^1 ((1+2x^2)dx - (1-2x)2x)dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x^3 - 4x + 1)dx + i\int_0^1 (-2x^2 + 2x + 1)dx =$$

$$= (-x^4 - 2x^2 + x)\Big|_0^1 + i(-\frac{2x^3}{3} + x^2 + x)\Big|_0^1 = -2 + \frac{4}{3}i$$

**Misal 2.40.** $\int_C (z^2 + z\bar{z})dz$ inteqralını hesablayın. $C$ – konturu $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ çevrəsinin qövsüdür(şək.27).



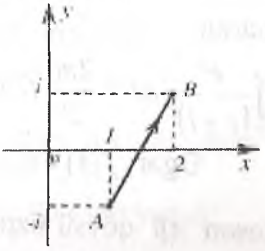
Şəkil 27.

*Həlli.* $z = e^{i\varphi}$ götürək. Onda $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $z^2 = e^{2i\varphi}$ olar. Beləliklə, alarıq:

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})dz = \int_0^\pi (e^{2i\varphi} + e^{i\varphi}e^{-i\varphi})ie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^\pi (e^{3i\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi =$$

$$= i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\varphi} + \frac{1}{i}e^{i\varphi}\right)\Big|_0^\pi = \frac{1}{3}e^{3\pi i} + e^{i\pi} - \frac{1}{3}e^0 - e^0 = -\frac{8}{3}$$

**Misal 2.41.** $\int_C (3z^2 + 2z)dz$ inteqralını hesablayın; $C$ – konturu $AB$ düz xəttindən ibarətdir, burada $z_A = 1 - i$, $z_B = 2 + i$ (şək. 28).



Şəkil 28.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiya $f(z) = 3z^2 + 2z$ analitik olduğundan Nyuton-Leybnits düsturunu tətbiq edə bilərik:

$$\int_C (3z^2 + 2z)dz = (z^3 + z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} =$$

$$= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 =$$

$$= 7 + 19i$$

**Misal 2.42.** $\int_C \frac{e^z}{z(z-3)}dz$ inteqralını hesablayın. $C$ – konturu mərkəzi 2 nöqtəsində və radiusu $\frac{3}{2}$ olan çevrədir.

*Həlli.* $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi$ -Koşinin inteqral düsturundan istifadə edək. İnteqralaltı funksiya kimi $C$ konturu ilə məhdudlaşmış dairədə analitik olan $f(z) = \frac{e^z}{z}$ funksiyasını götürək. Onda alarıq:

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-3)}dz = 2\pi i f(3) = \frac{2\pi e^3 i}{3}$$

**Misal 2.43.** $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^3}dz$ inteqralını hesablayın. $C$ – konturu $i$ nöqtəsini müsbət istiqamətdə bir dəfə dolanan qapalı konturdur.

*Həlli.* $f(z) = e^z$ funksiyası $C$ – konturu ilə məhdudlaşmış oblastda analitikdir. $\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$ düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$\int_C \frac{e^z}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(i) = -\pi \sin 1 + i\pi \cos 1$$

Əgər $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olarsa, onda $z$ müstəvisində yerləşən $AB$ qövsü üzrə inteqral $\int_{\cup AB} f(z)dz = \int_{\cup AB} udx - vdy + i\int_{\cup AB} vdx + udy$

düsturu ilə hesablanır, başqa sözlə, əyrixətli inteqralların cəmi kimi ifadə edilir.

$AB$ qövsü parametrik şəkildə verilmişsə, yəni $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t_1 < t < t_2$ olarsa, onda $\int_{AB} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$. $AB$ qövsü müəyyən çevrənin bir hissəsi olduqda bu düsturdan istifadə etmək əlverişlidir.

**Misal 2.44.** $\int_{OA} \bar{z}dz$ və $\int_{OA} zdz$ inteqrallarını hesablayın, burada $OA$:

a) $z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır;

b) O(0;0), A(1;1) və B(1;0) nöqtələrini birləşdirən OBA sınıq xəttidir.

*Həlli.* Burada $f(z) = \bar{z} = x - iy$ və $dz = dx + idy$ olduğundan inteqralı ikinci növ əyrixətli inteqral vasitəsilə aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\int_{OA} \bar{z}dz = \int_{OA} (x - iy)(dx + idy) = \int_{OA} xdx + ydy + i\int_{OA} xdy - ydx,$$

a) inteqrallama yolu $y = x$, $0 \le x \le 1$ düz xətt parçası olduğu üçün

$$\int_{OA} \bar{z}dz = \int_0^1 2xdx = 1;$$

b) inteqrallama yolu iki $OB\{y = 0, 0 \le x \le 1\}$ və $BA\{x = 1, 0 \le y \le 1\}$ parçadan ibarət sınıq xətt olduğundan, inteqralı iki hissəyə bölüb hesablasaq, alarıq:

$$\int_{OA} \bar{z}dz = \int_{OB} \bar{z}dz + \int_{BA} \bar{z}dz = \int_0^1 xdx + \int_0^1 ydy + i\int_0^1 dy = 1 + i$$

Deməli, $f(z) = \bar{z}$ funksiyasının inteqralı O və A nöqtələrini birləşdirən yolun seçilməsindən asılıdır.

$\int_{OA} zdz$ inteqralını hesablayaq. Burada $f(z) = z = x + iy$. İnteqralı ikinci növ əyrixətli inteqral vasitəsilə aşağıdakı kimi yazaq:

$$\int_{OA} zdz = \int_{OA} xdx - ydy + i\int_{OA} xdy + ydx .$$

Alınan ikinci növ inteqralların inteqralaltı ifadələri tam diferensial olduğundan inteqrallama yolunun bir halına baxmaq kifayətdir. Belə ki, a) halında parçanın tənliyi $y = x$, $0 \le x \le 1$ olduğundan, alırıq:

$$\int_{OA} zdz = i\int_0^1 2xdx = i .$$

İnteqralın inteqrallama yolunun formasından asılı olmadığını nəzərə alaraq məsələni belə də qoymaq olardı: $z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən əyri üzrə $\int_{OA} zdz$ inteqralını hesablayın.

## $\int_C f(z)dz$ inteqralının hesablanma üsulları

***Birinci üsul.*** $\int_C f(z)dz$ inteqralının hesablanması $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$ həqiqi dəyişənli funksiyaların əyrixətli inteqrallarının hesablanmasına gətirilir.

1. $\mathrm{Re}\, f(z) = u$, $\mathrm{Im}\, f(z) = v$ tapılır.
2. $f(z)dz$ inteqralaltı ifadə $udx - vdy + i(vdx + udy)$ şəklinə gətirilir.
3. $\int_C Pdx + Qdy$ şəklində inteqral ikinci növ əyrixətli inteqralların hesablanma qaydası ilə hesablanır.

***İkinci üsul.*** İnteqrallama yolu parametrik şəkildə verilibsə, $\int_C f(z)dz$ inteqralının hesablanması $\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$ müəyyən inteqralının hesablanmasına gətirilir.

1. $z = z(t)$ əyrisinin parametrik tənliyi yazılır və inteqrallama sərhədləri ($t = \alpha$ başlanğıc, $t = \beta$ son nöqtəyə uyğun gəlir) tapılır;

2. kompleks qiymətli $z = z(t)$ funksiyasının $dz = z'(t)dt$ diferensialı tapılır;

3. $z = z(t)$ inteqralaltı ifadədə yerinə yazılır və inteqral $\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt$ şəklinə gətirilir;

4. Bu sonuncu müəyyən inteqral hesablanır.

***Üçüncü üsul.*** Bir rabitəli oblastlarda analitik funksiyaların inteqralları $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$-Nyuton-Leybnits düsturunun tətbiq edilməsi ilə tapılır.

1. Riyazi analizdən məlum olan üsullarla $F(z)$ ibtidai funksiyası tapılır.

2. Nyuton-Leybnits düsturu tətbiq edilir.

**Misal 2.45.** $\int_C \mathrm{Re}\, z dz$ inteqralını hesablayın. Burada $C$ konturu $z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən a) düz xəttdir; b) O(0;0), A(1;1) və B(1;0) nöqtələrini birləşdirən OBA sınıq xəttidir.

*Həlli.*

a) Birinci üsulu tətbiq edək. İnteqralaltı ifadə $\mathrm{Re}\, z dz = x(dx + idy)$ şəklindədir. Ona görə də $\int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_C x dx + i\int_C x dy$. İnteqralı $y = x$, $0 \le x \le 1$ ($z_1 = 0$ və $z_2 = 1 + i$ nöqtələrini birləşdirən OA parçasının tənliyi) olduqda hesablayaq.

$$\int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_C x dx + i\int_C x dy = \int_0^1 x dx + i\int_0^1 x dx = \frac{1+i}{2}.$$

b) İnteqrallama yolu iki parçadan ibarət olduğu üçün inteqralı iki inteqralın cəmi kimi yazırıq: $\int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_{OB} \mathrm{Re}\, z dz + \int_{BA} \mathrm{Re}\, z dz$. OB parçası üçün $y = 0$, $0 \le x \le 1$ və BA parçası üçün isə $x = 1$, $0 \le y \le 1$ olduğunu nəzərə alaraq, hər bir inteqralı əvvəlki halda olduğu kimi hesablayırıq

$$\int_C \operatorname{Re} z\,dz = \int_{OB} x\,dx + ix\,dy + \int_{BA} x\,dx + ix\,dy = \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 1\cdot dy = \frac{1}{2} + i\,.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, baxdığımız misalda inteqralaltı funksiya analitik olmadığından inteqralın qiyməti bu iki nöqtəni birləşdirən əyrilərdən asılı olaraq müxtəlif ola bilər.

**Misal 2.46.** $\int_C |z|\bar{z}\,dz$ inteqralını hesablayın. Burada $C$ konturu $|z|=1$ çevrəsinin yuxarı yarım hissəsidir, dolanma istiqaməti isə saat əqrəbinin əksinə olan istiqamətdir.

*Həlli.* $C$ əyrisi parametrik $z=e^{it}$, $0\le t\le\pi$ tənliyə malik olduğundan, ikinci üsuldan istifadə edək. İnteqralaltı funksiya kəsilməzdir, lakin analitik deyil. $z=e^{it}$, $0\le t\le\pi$ olduğundan $\bar{z}=e^{-it}$, $|z|=1$, $dz=ie^{it}dt$ olar.

Onda $\int_C |z|\bar{z}\,dz = \int_0^{\pi} 1\cdot e^{-it}\cdot ie^{it}dt = \int_0^{\pi} i\,dt = i\pi$ alarıq.

**Misal 2.47.** Analitik funksiyaların inteqralını hesablayın.

a) $\int_0^i \sin^2 z\,dz$; b) $\int_{-i}^{1} \frac{dz}{(z-i)^2}$, inteqrallama yolu $i$ nöqtəsindən keçmir.

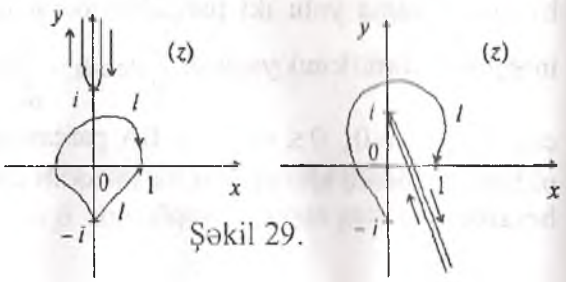
*Həlli.*

a) Üçüncü üsuldan istifadə edək.

$$\int_0^i \sin^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^i (1-\cos 2z)dz = \frac{1}{2}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_0^i = \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}\sin 2i =$$

$$= \frac{1}{2}i - i\frac{sh2}{4} = \frac{i}{4}(2-sh2)$$

b) İnteqralaltı funksiya $i$ nöqtəsindən başqa hər yerdə analitik olduğundan $i$ nöqtəsindən $\infty$-a doğru şüa boyunca kəsik aparsaq, bir rabitəli oblast alarıq(şək. 29). Bu bir rabitəli oblastda inteqralaltı funksiya anali-



Şəkil 29.

tik olar. Ona görə də Nyuton-Leybnits düsturunu tətbiq etmək olar və inteqralın qiyməti verilmiş iki nöqtəni birləşdirən və $i$ nöqtəsindən keçməyən istənilən əyri üçün eyni olar. Şəkildə kəsiyin masının iki halı göstərilir. Dolanma istiqamətləri oxlarla göstərilir. Alınan birrabitəli oblastlarda funksiya analitikdir.

İnteqralı hesablayaq:

$$\int_{-i}^{1}\frac{dz}{(z-i)^2}=\frac{-1}{z-i}\Bigg|_{-i}^{1}=-\frac{1}{1-i}-\frac{1}{2i}=-\frac{1+i}{2}+\frac{i}{2}=-\frac{1}{2}.$$

**Misal 2.48.** $\int_{0}^{1+i} zdz$ inteqralını hesablayın.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiya bütün kompleks müstəvidə analitik olduğundan Nyuton-Leybnits düsturunu tətbiq etsək alarıq:

$$\int_{0}^{1+i} zdz=\frac{z^2}{2}\Bigg|_{0}^{1+i}=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

**Misal 2.49.** $\int_{C}\frac{dz}{(z-a)^n}$ inteqralını hesablayın. Burada $C$ konturu mərkəzi $a$ və radiusu $R$ olan çevrədir.

*Həlli.* Çevrənin $|z-a|=R$ parametrik şəkildə tənliyini yazaq: $z-a=\mathrm{Re}^{it}$ və $z=a+\mathrm{Re}^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. Diferensialı tapırıq: $dz=Rie^{it}dt$. Bunları inteqralaltı ifadədə nəzərə alaq:

$$\int_{C}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_{0}^{2\pi}\frac{Rie^{it}dt}{R^n e^{int}}=\frac{i}{R^n}\int_{0}^{2\pi}e^{it(1-n)}dt.$$

Burada iki hala $n=1$ və $n\neq 1$ hallarına baxaq.

$n\neq 1$ olduqda

$$\int_{0}^{2\pi}e^{it(1-n)}dt=\frac{1}{i(1-n)}e^{it(1-n)}\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{1}{i(n-1)}\left(1-e^{2\pi i(n-1)}\right).$$

$e^{2\pi i(n-1)}=e^{2km}=1$ olduğundan alırıq ki, $\int_{C}\frac{dz}{(z-a)^n}=0$

$n=1$ olduqda isə

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

Deməli,

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Nəticə nə $a$-dan, nə də $R$-dən asılı deyil. Xüsusi halda, $a=0$ və $n=1$ olsa, $\int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ olar.

Qeyd edək ki, əgər nöqtə $C: |z-a| = R$ konturunu $k$ dəfə dolanırsa, onda arqument 0-dan $2\pi k$-ya qədər (əgər dolanma müsbət istiqamətdədirsə, $k>0$; əgər dolanma əks istiqamətdədirsə, $k<0$) dəyişər. Ona görə də $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k$ və deməli, $\int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = 2k\pi i$ olar.

**Misal 2.50.** $f(z)=1$ funksiyasının başlanğıcı $a$ nöqtəsində və sonu $b$ nöqtəsində olan hamar $C$ konturu üzrə inteqralını hesablayın.

*Həlli.* Tutaq ki, $C$ konturu parametrik şəkildə $z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $a=z(\alpha), b=z(\beta)$ tənliklərilə verilir. Onda parametrik şəkildə verilmiş kompleks qiymətli funksiyanın inteqralının hesablanması və Nyuton-Leybnits düsturlarından istifadə etsək, yaza bilərik.

$$\int_C 1\,dz = \int_\alpha^\beta z'(t)dt = \int_\alpha^\beta x'(t)dt + i\int_\alpha^\beta y'(t)dt = x(t)\Big|_\alpha^\beta + iy(t)\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= x(\beta)-x(\alpha)+i(y(\beta)-y(\alpha)) = z(\beta)-z(\alpha) = b-a$$

Görürük ki, $\int_C 1\,dz$ inteqralı $C$ konturunun formasından asılı deyil, yalnız başlanğıc və son nöqtələrdən asılıdır.

**Misal 2.51.** $\int_C \frac{\sin z}{z^2+4} dz$ inteqralını hesablayın. $C$ konturu mərkəzi $i$ nöqtəsində və radiusu 2-yə bərabər olan çevrədir.

*Həlli.* $z^2+4=(z-2i)(z+2i)$ olduğundan inteqralaltı funksiya iki məxsusi nöqtəyə $\pm 2i$ malikdir və $2i$ nöqtəsi $C$ konturuna daxildir. Ona görə də inteqralı aşağıdakı şəklə salaq:

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-2i)(z+2i)}dz = \int_C \frac{\frac{\sin z}{z+2i}}{z-2i}dz .$$

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z+2i}$ funksiyası $C$ konturu ilə məhdudlaşmış qapalı dairədə analitik olduğundan $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ -Koşinin inteqral düsturunda $z=2i$, $\xi=z$ qəbul etsək, alarıq:

$$\int_C \frac{\frac{\sin z}{z+2i}}{z-2i}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{\sin(2i)}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}\sin(2i) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i} = i\frac{\pi}{4}(e^{2}-e^{-2})$$

**Misal 2.52.** $\int_C \dfrac{e^z}{(z-2)^4}dz$ inteqralını hesablayın. $C$ konturu mərkəzi 0 nöqtəsində və radiusu 3-ə bərabər olan çevrədir($|z|=3$).

*Həlli.* $z=2$ nöqtəsi $|z|<3$ dairəsinin daxilində yerləşdiyindən və $f(z)=e^z$ funksiyası $|z|\le 3$ qapalı dairəsində analitik olduğundan $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$, $n=1,2,3,...$ düsturundan $n=3$ olduqda istifadə etsək, alarıq:

$$\int_C \frac{e^z}{(z-2)^4}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}f'''(2) = \frac{2\pi i}{3!}e^2 = \frac{\pi i}{3}e^2$$

**Misal 2.53.** $\int_C \bar{z}^2 dz$ inteqralını hesablayın. $C$ konturu A(-1;0), B(0;1) və C(1;0) nöqtələrini birləşdirən ABC sınıq xəttidir.

*Həlli.* Əyrinin parametrik tənliyi $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ şəklində olar. ABC sınıq xətti iki AB və BC parçalarından ibarət olduğundan və bu parçaların hər birinin öz tənliyi olduğundan, onlara ayrıca baxaq:

AB parçasını $y = x + 1$, $-1 \le x \le 0$ tənliyi və ya parametrik formada $x(t) = t$, $y(t) = t + 1$, və ya $z(t) = t + i(t + 1)$, $-1 \le t \le 0$ şəklində vermək olar.

BC parçasını isə $y = -x + 1$, $0 \le x \le 1$ tənliyi və ya parametrik formada $z(t) = t + i(-t + 1)$, $0 \le t \le 1$ şəklində vermək olar.

Onda $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$ düsturundan istifadə etmək olar.

AB parçası üçün $z'(t) = 1 + i$ olduğundan

$$\int\limits_C \bar{z}^2 dz = \int\limits_{AB} (x - iy)^2 dz = \int\limits_{-1}^{0} (t - i(t+1))^2 z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (t^2 - 2it(t+1) - (t+1))^2 (1+i)dt = \int\limits_{-1}^{0} (2t^2 - 1 + i(-2t^2 - 4t - 1)dt =$$

$$= \left( \frac{2t^3}{3} - t + i\left( -\frac{2t^3}{3} - 2t^2 - t \right) \right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}$$

BC parçası üçün isə $z'(t) = 1 - i$ olduğundan

$$\int\limits_C \bar{z}^2 dz = \int\limits_{BC} (x - iy)^2 dz = \int\limits_0^1 (t - i(-t+1))^2 z'(t)dt =$$

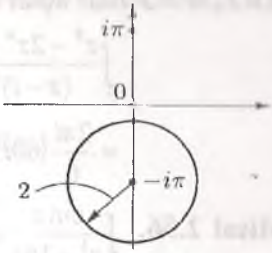
$$= \int\limits_0^1 (t^2 - 2it(1-t) - (1-t))^2 (1-i)dt = \int\limits_0^1 (2t^2 - 1 + i(2t^2 - 4t + 1)dt =$$

$$= \left( \frac{2t^3}{3} - t + i\left( \frac{2t^3}{3} - 2t^2 + t \right) \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$$

Deməli, bütün $C$ konturu üzrə inteqral

$$\int\limits_C \bar{z}^2 dz = \int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz + \int\limits_{BC} \bar{z}^2 dz = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3} - \frac{1}{3} - \frac{i}{3} = -\frac{2}{3}$$ olar.

**Misal 2.54.** Koşi teoremini və ya törəmələr üçün olan Koşi düsturundan istifadə edərək $C:|z+i\pi|=2$ qapalı konturu üçün $\int_C \frac{\cos 2z}{z^2+\pi^2}dz$ inteqralını (dolanma istiqaməti saat əqrəbinin əksinədir) hesablayın.



Şəkil 30.

*Həlli.* $z^2+\pi^2=0$ tənliyi $z=\pm i\pi$ kimi iki həllə malikdir. Ona görə də inteqralaltı funksiyanın iki məxsusi nöqtəsi $\pm i\pi$ var və $-i\pi$ nöqtəsi $C$ konturuna daxildir. $i\pi$ nöqtəsi isə onun xaricində yerləşir (şəkil 30). $z^2+\pi^2=(z-i\pi)(z+i\pi)$ ayrılışından istifadə edib inteqralı aşağıdakı şəklə salaq:

$$\int_C \frac{\cos 2z}{z^2+\pi^2}dz=\int_C \frac{\frac{\cos 2z}{z-i\pi}}{z+i\pi}dz.$$

$f(z)=\frac{\cos 2z}{z-i\pi}$ funksiyası $C$ konturu ilə məhdudlaşmış qapalı dairədə analitik olduğundan $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ -Koşinin inteqral düsturunda $z=-i\pi$, $\xi=z$ qəbul etsək, alarıq:

$$\int_C \frac{\cos 2z}{z^2+\pi^2}dz=\int_C \frac{f(z)}{z-(-i\pi)}dz=2\pi i f(-i\pi)=2\pi i\frac{\cos(-2\pi i)}{-\pi i-\pi i}=$$

$$=-\cos 2\pi i=-\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i}+e^{-2\pi i}\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{2\pi}\right)$$

**Misal 2.55.** Koşi teoremini və ya törəmələr üçün olan Koşi düsturundan istifadə edərək $C:|z|=5$ qapalı konturu üçün $\int_C \frac{z^5-2z^4+3}{(z-i)^4}dz$ inteqralını hesablayın (dolanma istiqaməti saat əqrəbinin əksinədir).

*Həlli.* $f(z)=z^5-2z^4+3$ işarə edək. $f(z)=z^5-2z^4+3$ funksiyası qapalı $|z|\le 5$ dairəsində analitikdir. $z=i$ nöqtəsi bu dairənin daxi-

lində yerləşir. Ona görə də törəmələr üçün olan Koşi düsturunu $z=i$, $n=3$ halı üçün tətbiq edə bilərik.

$$\int_C \frac{z^5-2z^4+3}{(z-i)^4}dz=\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}f'''(i)=$$

$$=\frac{2\pi i}{6}\left(60i^2-48i\right)=2\pi i\left(-10-8i\right)=4\pi(4-5i)$$

**Misal 2.56.** $\int_C \frac{\sin z}{z^3+16z}dz$ inteqralını hesablayın. $C$ konturu a) mərkəzi $2+i$ nöqtəsində və radiusu 2; b) mərkəzi $-2i$ nöqtəsində və radiusu 1 olan çevrədir.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiyanın sıfırlarını- məxsusi nöqtələrini tapırıq. Bunlar $z_1=0$, $z_2=4i$, $z_3=-4i$ nöqtələridir. Sonra isə bu nöqtələrin inteqrallama konturuna nəzərən yerləşmələrini müəyyən edirik. Hər iki halda bu nöqtələrdən heç biri inteqrallama konturuna daxil deyil. Deməli, inteqralaltı funksiya verilmiş konturlarda analitik funksiyadır. Onda Koşi teoreminə əsasən hər iki halda, inteqral sıfra bərabərdir. Qeyd etmək lazımdır ki, inteqral verilmiş konturlara daxil olan və inteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtələrinin daxil olmadığı istənilən oblast üçün sıfra bərabərdir.

**Misal 2.57.** $\int_C \frac{\sin z}{z^3+16z}dz$ inteqralını hesablayın. $C$ konturu a) mərkəzi 0 nöqtəsində və radiusu 2; b) mərkəzi $-1-i$ nöqtəsində və radiusu 2 olan çevrədir.

*Həlli.* Əvvəlki misaldakı mühakimələrə analoji mühakimə yürütsək, görərik ki, yalnız $z_1=0$ nöqtəsi verilmiş konturlara daxildir. Ona görə də inteqralaltı funksiyanı $\frac{\frac{\sin z}{z^2+16}}{z}$ şəklində yazaq. Burada $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+16}$ funksiyası hər iki halda verilmiş konturlarda analitikdir. Koşinin inteqral düsturunu tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_C \frac{\sin z}{z(z^2+16)}dz=2\pi i\left(\frac{\sin z}{z^2+16}\right)\Big|_{z=0}=0.$$

## §9. Analitik funksiya sıraları

### 9.1. Ədədi sıralar

Tutaq ki, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığı ($a_k$ ədədləri kompleks ədədlərdir) verilmişdir. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $n-$ci xüsusi cəmi və $\{S_k\}_{k=1}^{n}$ xüsusi cəmlər ardıcıllığını tərtib edək. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ –ədədi sırasına baxaq.

*Tərif. Əgər* $\{S_k\}_{k=1}^{n}$ *xüsusi cəmlər ardıcıllığı S-ə yığılırsa, onda deyirlər ki,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ədədi sırası yığılır. Xüsusi cəmlər ardıcıllığının limitinə sıranın* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ *cəmi deyilir.*

*Sıranın yığılmasının zəruri və kafi əlaməti. Ədədi ardıcıllığın yığılmasının* ***Koşi meyarı.*** $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ varsa ki, $\forall n \geq N$, $\forall m > 0$ üçün $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$ olsun, onda sıra yığılır.

Buradan sıranın yığılmasının zəruri şərti (ancaq kafi deyil) alınır: $n \to \infty$ olduqda $a_n \to 0$.

*İsbatı.* ▲ Tutaq ki, sıra yığılır, onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ var ki, $\forall n \geq N$, $\forall m > 0$ üçün $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$ olmasından alınır ki, $\forall n \geq N$ üçün $|a_{n+1}| = |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$. Bu isə o deməkdir ki, $n \to \infty$ olduqda $a_n \to 0$. ▼

Hər bir kompleks ədədə bir cüt həqiqi ədəd uyğun olduğundan kompleks hədli sıraların yığılması uyğun həqiqi hədli sıraların yığılması ilə bağlıdır. Bunu teorem şəklində ifadə edək. Tutaq ki, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$.

**Teorem.** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sırasının yığılması üçün zəruri və kafi şərt* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *və* $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ *həqiqi hədli sıraların yığılmasıdır.* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha + i\beta$ *olması üçün zəruri və kafi şərt* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \alpha$ *və* $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \beta$ *olmasıdır.*

*İsbatı.* ▲ Xüsusi cəmləri $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ kimi işarə edək. Onda $S_n = A_n + iB_n$ olar. $S_n = A_n + iB_n$ ardıcıllığının limitinin $S = \alpha + i\beta$ olması üçün uyğun həqiqi hədli $\{A_n\}$ və $\{B_n\}$ ardıcıllıqlarının limitləri və $\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} B_n = \beta$ olmalıdır. Məlum hökmdən alınır ki, $\{S_n\}$, $\{A_n\}$ və $\{B_n\}$ ardıcıllıqlarının yığılan olması uyğun olaraq $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ sıralarının yığılan olması ilə eynigüclüdür. ▼

Bu teoremdən həqiqi hədli sıralar üçün doğru olan bir çox xassələr və hökmlərin kompleks hədli sıralar üçün də doğru olması alınır. Onların bəzilərini sadalayaq.

1. Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ və $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ sıraları yığılır və onların cəmləri uyğun olaraq $A$ və $B$-dir. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$ sırası da yığılır və onun cəmi $A + B$ – dir.

2. Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ sırası yığılır və onun cəmi $A$-dır. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k)$ sırası da yığılır və onun cəmi $\lambda A$ – dır.

3. Əgər yığılan sıraya sonlu sayda hədd əlavə etsək və ya çıxsaq, alınan sıra yenə də yığılar.

***Tərif.*** $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n$ *– ifadəsinə sıranın n-ci qalığı deyilir.*

Belə ki, $r_{n+m} - r_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = S_{n+m} - S_n$ olduğundan ədədi sıranın yığılan olmasının ***zəruri və kafi şərti:*** *$n \to \infty$ olduqda $|r_n| \to 0$ olmasıdır.*

*İsbatı.* ▲ *Zərurilik.* Əgər ədədi sıra yığılırsa, onda $|r_n| = |S - S_n| \to 0$.

*Kafilik.* $|S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| = |r_{n+m} - r_n|$. Tutaq ki, $|r_n| \to 0$. Buradan alınır ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ var ki, $\forall n \geq N$ üçün $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ və $\forall n \geq N$, $\forall m > 0$ üçün $|r_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Bu isə o deməkdir ki, $|S_{n+m} - S_n| = |r_{n+m} - r_n| < \varepsilon$ sıra yığılır. ▼

***Tərif.*** *Əgər $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ (yığılırsa), onda sıra mütləq yığılan sıra adlanır. Əgər $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası yığılırsa, lakin $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırası dağılırsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası şərti yığılır.*

Aydındır ki, əgər sıra mütləq yığılırsa, onda o yığılır. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyil.

Sıraların mütləq yığılan olmasının kafi şərti Dalamber və Koşi əlamətləridir.

**Dalamber əlaməti.** *Əgər müəyyən $N$ nömrəsindən başlayaraq $\forall n \geq N$ üçün $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq L < 1$ şərti ödənirsə, onda $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sırası yığılır.*

*Əgər müəyyən $N$ nömrəsindən başlayaraq $\forall n \geq N$ üçün $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ olarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sırası dağılır.*

*Limit formasında Dalamber əlaməti.*

*Əgər* $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ *varsa, onda* $L<1$ *olduqda* $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ *sırası yığılır,* $L>1$ *olduqda* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *sırası dağılır,* $L=1$ *olduqda isə heç nə demək mümkün deyil.*

*İsbatı.* ▲Əgər $L<1$, onda $\exists \varepsilon > 0$ varsa ki, $L<1-2\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon<1-\varepsilon$. Belə ki, $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ olduğundan $\exists N$ varsa ki,

$\forall n \geq N \quad L-\varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < L+\varepsilon < 1-\varepsilon = q < 1, \quad |a_{n+1}| < |a_n|q < |a_N|q^{n+1-N}$,

başqa sözlə, sıra vuruğu $q<1$ olan həndəsi silsilə ilə majorantdır. Analoji olaraq $L>1$ olduqda sıranın dağılan olması isbat edilir. ▼

**Koşi əlaməti.** *Əgər müəyyən* $N$ *nömrəsindən başlayaraq* $\forall n \geq N$ *üçün* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq L < 1$ *olarsa, onda* $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ *sırası yığılır.*

*Əgər müəyyən* $N$ *nömrəsindən başlayaraq* $\forall n \geq N$ *üçün* $\sqrt[n]{|a_n|} > L \geq 1$ *olarsa, onda* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *sırası dağılır.*

*Limit formada Koşi əlaməti.*

Əgər $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ varsa, onda $L<1$ olduqda $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ sırası yığılır, $L>1$ olduqda $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ sırası dağılır, $L=1$ olduqda isə heç nə demək mümkün deyil.

*İsbatı.* ▲ Əgər $L<1$, onda $\exists \varepsilon > 0$ varsa ki, $L<1-2\varepsilon \Rightarrow L+\varepsilon<1-\varepsilon$. Belə ki, $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ olduğundan $\exists N$ varsa ki, $\forall n \geq N \quad L-\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < L+\varepsilon < 1-\varepsilon = q < 1, \quad |a_n| < q^n$, başqa sözlə, sıra vuruğu $q<1$ olan həndəsi silsilə ilə majorantdır. Analoji olaraq $L>1$ olduqda sıranın dağılan olması isbat edilir. ▼

## 9. 2. Funksional sıra anlayışı

Tutaq ki, $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ ardıcıllığı verilmişdir və $z \in G$.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ ifadəsinə $G$ – də verilmiş funksional sıra deyilir.

*Tərif. Əgər $\forall z \in G$ üçün uyğun ədədi sıra müəyyən $w(z)$ ədədinə yığılırsa, onda $G$ – də $f(z) = w$ funksiyası müəyyən olunmuşdur ki, bu da funksional sıranın cəmi adlanır, sıra özü isə $G$ – də yığılan sıra adlanır.*

Əgər $z \in G$ nöqtəsini qeyd etsək, ədədi sıra alarıq. Ədədi sıra isə bəzi nöqtələrdə yığıla, bəzi nöqtələrdə isə dağıla bilər. Əgər $z \in G$ nöqtəsində sıra yığılırsa (dağılırsa), onda $z \in G$ nöqtəsinə yığılma (dağılma) nöqtəsi deyilir. Yığılma nöqtələri çoxluğuna funksional sıranın yığılma çoxluğu və ya oblastı deyilir. Yığılma oblastından olan hər bir yığılma nöqtəsi üçün $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ funksional sırasının öz $S(z)$ cəmi var. Beləliklə, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ funksional sırasının cəmi $S(z)$ yığılma çoxluğunda təyin olunmuş funksiyadır.

Əgər sıra $G$ – də yığılırsa, onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon, z)$ var ki, $\forall n \geq N(\varepsilon, z)$ üçün $|r_n(z)| < \varepsilon$ olar.

*Sıranın yığılan olmasının zəruri və kafi əlaməti.*

**Koşi meyarı.** $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon, z)$ var ki, $\forall n \geq N(\varepsilon, z)$ və $\forall m > 0$ üçün $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ olar.

Ümumiyyətlə, desək hər bir $z \in G$ nöqtəsinin özünün $N = N(\varepsilon, z)$ nömrəsi var, bütün $z$-lər üçün ümumi $N$ ola bilər ki, olmasın.

## 9.3. Oblastda sıranın müntəzəm yığılması

Əgər $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ var ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ və $\forall z \in G$ üçün eyni zamanda $|r_n(z)| < \varepsilon$ olarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ sırası müntəzəm yığı-

lır. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ sırası $G$ – də hər hansı $f(z)$ funksiyasına müntəzəm yığılırsa, onda bunu belə işarə edəcəyik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$$

Müntəzəm yığılmanın zəruri və kafi şərti ***Koşi meyarıdır:*** $\forall \varepsilon > 0$ *üçün* $\exists N(\varepsilon)$ *var ki,* $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m > 0$ *və* $\forall z$ *üçün eyni zamanda* $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ *olarsa, onda* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *sırası* $f(z)$ *funksiyasına müntəzəm yığılır.*

*İsbatı. Zərurilik* . ▲Tutaq ki, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ sırası $f(z)$ funksiy asına müntəzəm yığılır: $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ var ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m > 0$ və $\forall z$ üçün eyni zamanda $|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ və $|f(z) - S_{n+m}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olmasından alınır ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m > 0$ və $\forall z$ üçün eyni zamanda $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ ödənir.

*Kafilik.* Tutaq ki, $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N(\varepsilon)$ var ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m > 0$ və $\forall z$ üçün eyni zamanda

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \qquad (1)$$

ödənir. $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m > 0$ və $\forall z$ üçün eyni zamanda ədədi sıralar üçün Koşi meyarı ödənir, başqa sözlə, $G$ – də $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ təyin olunmuşdur. (1)-də $m \to \infty$ olduqda limitə keçsək alarıq: $\forall n \geq N(\varepsilon)$ və $\forall z$ üçün eyni zamanda $|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. Buradan alınır ki, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ və $\forall z$ üçün $r_n(z) < \varepsilon$. ▼

**Müntəzəm yığılmanın kafi şərti (Veyerştrass əlaməti)**

*Əgər* $\forall k \geq N$ *və* $\forall z$ *üçün* $|u_k(z)| < a_k$, $a_k > 0$ *və* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ *(yığılırsa), onda* $G$ *– də*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$$

*İsbatı.* ▲ $\forall n \geq N(\varepsilon)$ və $\forall z$ üçün

$$|r_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \,.\, ▼$$

*Müntəzəm yığılan sıraların xassələri.*

1. Tutaq ki, $u_k(z) \in C(G)$ və $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$, onda $f(z) \in C(G)$

*İsbatı.* ▲ $\forall n \geq N$, $|\Delta z| < \delta$ üçün

$$|\Delta f| = |f(z+\Delta z) - f(z)| \leq |f(z+\Delta z) - S_n(z+\Delta)| +$$

$$+ |S_n(z+\Delta z) - S_n(z)| + |S_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.\, ▼$$

2. Tutaq ki, $u_k(z) \in C(G)$ və $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$. Tutaq ki, $C \subset G$ hissə-hissə hamar konturdur və sonlu $L$ uzunluğuna malikdir: $\int_C ds = L$, onda $\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z)dz$

*İsbatı.* ▲

$$\left|\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z)dz\right| = \left|\int_C r_n(z)dz\right| \leq \int_C |r_n(z)|ds < \varepsilon' L < \varepsilon \;▼$$

**Veyerştrass teoremi 1.** *Əgər* $u_k(z) \in C\infty(G)$ *və* $\forall z \in \forall G' \subset G$ *üçün* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$, *onda*

1) $f(z) \in C\infty(G)$

2) $\forall z \in G$ *üçün* $f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$

3) $\forall z \in \forall G' \subset G$ *üçün* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \rightrightarrows f^{(p)}(z)$.

*İsbatı* ▲1). $\forall G' \subset G$ və $z \in \overline{G'}$ nöqtəsinə qədər dartıla bilən $C \subset G'$ –qapalı konturuna baxaq. Belə ki, $u_k(z) \in C\infty(G)$ və $\forall z \in \overline{G'}$

üçün $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$ müntəzəm yığılır. Onda $f(z) \in C(\overline{G'})$ (xassə 1-ə əsasən) kəsilməzdir. Xassə 2-yə əsasən

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z)dz = \text{(Koşi teoreminə əsasən)} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 .$$

Deməli, Morer teoreminin şərtləri ödənir, onda $f(z) \in C\infty(\overline{G'})$. $\overline{G'}$ ixtiyari olduğundan alınır ki, $f(z) \in C\infty(G)$.

**Qeyd.** Belə ki, $r_n(z) = f(z) - S_n(z) \Rightarrow r_n(z) \in C\infty(G)$.

2). İxtiyari $\forall \overline{G'} \subset G$ və $z \in \overline{G'}$ nöqtəsinə qədər dartıla bilən $C \subset \overline{G'}$– qapalı konturuna baxaq. $f(z) \in C\infty(G)$ olduğundan, onda

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi = \text{(teorem 8.4-ə əsasən)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi)\Big|_{\xi} \in C \Rightarrow f(\xi)\Big|_{\xi} \in C \Rightarrow$$

$$\frac{p!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\Bigg|_{\xi \in C} = \frac{p!}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\Bigg|_{\xi \in C} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{u_k(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) .$$

**Qeyd.** $r_n^{(p)}(z) = f^{(p)}(z) - S_n^{(p)}(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$.

3). İxtiyari $\forall \overline{G'} \subset G$ və $z \in \overline{G'}$ nöqtəsinə qədər dartıla bilən $C \subset \overline{G'}$– qapalı konturuna baxaq. $\forall \xi \subset C$ üçün $|z - \xi| > d_0$ şərti ödənir. Onda

$$r_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{r_n(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi$$

$|r_n(\xi)| < \varepsilon'$, $n > N(\varepsilon')$. $C \subset \overline{G'}$ konturu $\overline{G''} \subset G$ alt oblastının sərhədi olduğundan $\forall z \in \overline{G'}$ üçün $|r_n^{(p)}(z)| \le \frac{p! L \varepsilon'}{2\pi d_0^3} < \varepsilon$ eyni zamanda buradan alınır ki, $\forall z \in \forall \overline{G'} \subset G$ üçün $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \rightrightarrows f^{(p)}(z)$. ▼

**Qeyd.** Əgər hətta $z \in \overline{G'}$ üçün $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \rightrightarrows f^{(p)}(z)$ olduqda törəmələrdən ibarət sıranın müntəzəm yığılmasını ancaq qapalı alt oblastda ($\overline{G'} \subset G$) isbat edə bilərik. Başqa sözlə, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \rightrightarrows f^{(p)}(z)$ ancaq $\forall z \in \forall \overline{G'} \subset G$ üçün müntəzəm yığılmasından bu oblastda törəmələrdən ibarət sıranın müntəzəm yığılması alınmır.

Məsələn, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ sırası $|z| \le 1$ dairəsində müntəzəm yığılır. Lakin törəmələrdən ibarət $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$ sırası $|z| \le 1$ dairəsində müntəzəm yığılmır. Belə ki, $z = 1$ olduqda sıra dağılır. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$ sırası $|z| < 1$ olduqda müntəzəm yığılır.

***Teorem (Veyerştrass) II.*** *Tutaq ki,* $u_k(z) \in C\infty(\overline{G})$ *və* $\xi \in G$ *üçün* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi) \rightrightarrows f(\xi)$, *onda* $z \in \overline{G}$ *üçün* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \rightrightarrows f(z)$.

*İsbatı.* ▲ $\forall \xi \in G$ üçün $|S_{n+m}(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$. Buradan alırıq ki, maksimum prinsipinə görə $\forall z \in \overline{G}$ üçün $|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. ▼

**Misal 3.58.** İsbat edin ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$ sırası $|z| < 1$ dairəsində müntəzəm yığılır.

*Həlli.* $|z| < 1$ bərabərsizliyini ödəyən $z$ – lər üçün $\left|\frac{z^n}{3^n}\right| < \frac{1}{3^n}$ ödənir. Başqa sözlə, $|z| < 1$ olduqda verilmiş funksional sıra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ədədi sırası ilə majorantdır. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sırası isə Veyerştrass əlamətinə görə yığıldığından, verilmiş funksional sıra $|z| < 1$ dairəsində müntəzəm yığılır.

## §10. Qüvvət sıraları

### 10.1. Abel teoremi. Abel teoreminin nəticəsi

***Tərif.*** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *–şəklində sıralara qüvvət sırası deyilir.*

Burada $z_0$ –mərkəz, $c_n$ -əmsalları verilmiş kompleks ədədlərdir. $z = z_0$ olduqda sıra yığılır. Sıra bir nöqtədə yığıla bilər. Məsələn, $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ , cləcə də bütün kompleks müstəvidə, məsələn, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ yığıla bilər. Qüvvət sıralarını tədqiq edərkən onun yığılma oblastını müəyyən etmək mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Aşağıda göstərəcəyik ki, qüvvət sırasının yığılma oblastı onun $c_n$ əmsallarının formasından asılıdır.

***Abel teoremi.*** *Əgər* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *qüvvət sırası* $z_1 \neq z_0$ *nöqtəsində yığılırsa, onda o* $\forall z : |z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *üçün də yığılır və* $|z-z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ *dairəsində müntəzəm yığılır.*

*İsbatı.* ▲Sıranın yığılmasının zəruri şərtinə görə $\exists A > 0$ : var ki, $\forall z$ üçün $|c_n (z_1 - z_0)^n| < A$.

Buradan $|c_n| < \frac{A}{|(z_1 - z_0)|^n} \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right| < A \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$ . Teoremin şərtinə görə

$\frac{z-z_0}{z_1 - z_0} = q < 1 \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right| < A \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sıra yığılır.

$|z-z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ olduqda sıra, Veyerştrasın majorant əlamətinə görə müntəzəm yığılır.

Belə ki, $\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right| \leq A \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\rho}{z_1 - z_0} \right|^n < A \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ , $q < 1$ ▼.

*Abel teoreminin nəticələri.*

1. Əgər qüvvət sırası $z_2 \neq z_0$ nöqtəsində dağılırsa, onda $\forall z: |z - z_0| > |z_2 - z_0|$ üçün də dağılır. (Əksini fərz etməklə, alarıq ki, Abel teoreminə görə sıra ixtiyari $\rho < |z - z_0|$ dairəsində yığılır və deməli, $z_2$ nöqtəsində də yığılır. Bu isə şərtə ziddir).

2. *Yığılma dairə. Yığılma radiusu.* $\forall z_1$ üçün $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ qüvvət sırasının yığıldığı $z_0$-nöqtəsindən $z_1$ nöqtəsinə qədər olan məsafədən ibarət nöqtələr çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhədi olan $\sup |z_1 - z_0| = R$ ifadəsinə baxaq. Əgər $R \neq \infty$, onda $\forall z_2$ üçün $z_2 - z_0 > R$ çoxluğunda sıra dağılır. $\forall z_2$ üçün sıranın dağıldığı nöqtələr çoxluğunu $\inf |z_2 - z_0| = R$ işarə edək. Tutaq ki, $R > 0$ onda qüvvət sırasının ən böyük yığılma oblastı $|z - z_0| < R$ dairəsidir. $R > 0$ qüvvət sırasının yığılma radiusudur. Yığılma dairəsinin daxilində sıra yığılır, ondan xaricdə sıra dağılır, dairənin sərhəd nöqtələrində $|z - z_0| = R$ həm yığıla bilər, həm də dağıla bilər.

3. *Koşi – Adamar düsturu.* $R = \frac{1}{L}$, $L = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

*İsbatı.* ▲ Tutaq ki, $0 < L < \infty$. Onda

1) Belə ki, $L = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ olduğundan, onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N$ var ki, $\forall n > N$ üçün $\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$

2) Digər tərəfdən, elə həmin $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\left\{\sqrt[k]{|c_n|}\right\}$ ardıcıllığının sonsuz sayda həddi var ki, $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$.

İsbat etmək lazımdır ki,

a) $\forall z_1$ üçün $|z_1 - z_0| < R = \frac{1}{L}$ sıra yığılır.

b) $\forall z_2$ üçün $|z_2 - z_0| > R = \frac{1}{L}$ sıra dağılır.

Bunu isbat edək.

a) $\forall z_1 : L|z_1 - z_0| < 1$ götürək və $\varepsilon = \dfrac{1 - L|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|}$ seçək. Onda

$L + \varepsilon = \dfrac{1 + L|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|}$. Belə ki, $\forall n > N$ üçün $\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$

$|z_1 - z_0|\sqrt[n]{|c_n|} < \dfrac{1 - L|z_1 - z_0|}{2} = q < 1 \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n$ sıra dağılır.

b) $\varepsilon = \dfrac{L|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|} \Rightarrow L - \varepsilon = \dfrac{1}{|z_2 - z_0|}$ seçək. Belə ki, sonsuz sayda hədlər üçün $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon \Rightarrow |z_2 - z_0|\sqrt[n]{|c_n|} > 1 \Rightarrow |c_n(z_2 - z_0)^n| > 1$ sıra dağılır.

*L=0 halı:* $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N$ var ki, $\forall n > N$ üçün $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$ $\forall z$ və $0 < q < 1$ üçün $\varepsilon = \dfrac{q}{|z - z_0|} \Rightarrow |z - z_0|\sqrt[n]{|c_n|} < q \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n$ $\forall z$ üçün, sıra yığılır. Başqa sözlə, $R = \infty = \dfrac{1}{0} = \dfrac{1}{L}$.

$L = \infty$ *halı:* $\forall M > 0$ üçün sonsuz sayda hədd var ki, $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\} : \sqrt[n]{|c_n|} > M$. $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists N$ var ki, $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$. Götürək $\forall z \neq z_0$ və $q > 1$. $M = \dfrac{q}{|z - z_0|} \Rightarrow$ üçün ardıcıllığın elə sonsuz sayda hədləri var ki, $\forall z \neq z_0$ üçün $|z - z_0|\sqrt[n]{|c_n|} > 1 \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| > 1$, başqa sözlə, $R = 0 = \dfrac{1}{\infty} = \dfrac{1}{L}$. ▼

**4.** İxtiyari $|z - z_0| \le \rho < R$ dairəsində qüvvət sırası müntəzəm yığılır. Veyerştrass teoreminə görə

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z) \in C\infty(|z - z_0| < R)$$

**5.** Veyerştrass teoreminə görə yığılma dairəsi daxilində qüvvət sırasını istənilən dəfə hədbəhəd diferensiallamaq və inteqrallamaq olar. Bu zaman yığılma radiusu dəyişmir.

**6.** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f(z) \Rightarrow c_0 = f(z_0)$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^n = f(z) \Rightarrow c_1 = f'(z_0);$$

.....

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(n+k)!(z-z_0)^n = f^{(k)}(z) \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Bir çox hallarda yığılma dairəsi və yığılma radiusunu Dalamber və Koşi əlamətlərindən istifadə etməklə tapmaq olar. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ qüvvət sırasına əvvəlcə Dalamber əlamətini tətbiq edək.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)}{c_n}\right| = |z-z_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L.$$

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ işarə edək. Onda $\frac{|z-z_0|}{R} = L$. Dalamber əlamətinə görə $L<1$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ sırası yığılır, $L>1$ olduqda isə $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ sırası dağılır. Deməli, $|z-z_0|<R$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ sırası yığılır, $|z-z_0|>R$ olduqda isə $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ sırası dağılır. Ona görə də $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ şəklində müəyyən edilən $R$ ədədi sıranın yığılma radiusudur. Analoji mühakimələri Koşi əlamətinə tətbiq etdikdə alarıq ki, $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Beləliklə, qüvvət sırasının yığılma radiusunu ya limitin varlığı şərti daxilində $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$, $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ düsturlarını tətbiq etməklə, ya da birbaşa Dalamber və Koşi əlamətlərindən istifadə etməklə tapmaq olar.

**Misal 3.59.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$ -sıranın yığılma dairəsini və yığılma radiusunu tapın.

*Həlli.* Dalamber əlamətindən istifadə edək.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}{n^2(1+i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2|1+i| = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \sqrt{2}$$

Onda $R=\sqrt{2}$, yığılma dairəsi isə $|z-i|<\sqrt{2}$ olar.

**Misal 3.60.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(z-1)^n$ -sıranın yığılma dairəsini və yığılma radiusunu tapın.

*Həlli.* Koşi əlamətindən istifadə edək.

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0$. Deməli, $R=0$. Onda verilən sıra yeganə $z=1$ nöqtəsində yığılır.

**Misal 3.61.** $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$ - sıranın yığılma dairəsini və yığılma radiusunu tapın.

*Həlli.* $\forall n$ üçün $c_n=1$ olduğundan aydındır ki, sıranın yığılması radiusu $R=1$ olar.

$S_n = \frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)}$; $|z-z_0|<1$ və $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-(z-z_0)}$. Buradan alınır ki, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \frac{1}{1-(z-z_0)}$ –Sonsuz həndəsi silsilənin cəmi düsturu.

Beləliklə, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f(z)\in C\infty(|z-z_0|<R)$.

**Misal 3.62.** Verilmiş sıranı araşdırın.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

*Həlli.* Bu sıra həndəsi silsilədir və onun yığılma dairəsi $|z|<1$-dir. Bu dairənin daxilində sıra mütləq yığılır. $|z|\le q<1$ şərtini ödəyən istənilən qapalı dairədə isə mütləq yığılır. Yığılma dairəsinin daxi-

lində bu sıranın cəmi $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Bu sıra sıraların ayrılışında çox mühüm rol oynayır.

**Misal 3.63.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \ldots$ sırasının yığılmasını tədqiq edin.

*Həlli.* Onun yığılma radiusu $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Deməli, bu sıranın yığılma dairəsi bütün $z$ kompleks müstəvisidir.

**Misal 3.64.** Verilmiş sıraların yığılmasını tədqiq edin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(i+n)}{2^n}$.

*Həlli.* a) $\cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} > \frac{e^n}{2}$ olduğundan yaza bilərik

$\frac{\cos in}{2^n} > \frac{e^n}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ sırasına Dalamber əlamətini tətbiq etsək, alarıq

$\lim \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n} = \frac{e}{2} > 1$. Deməli, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ sırası dağılır. Müqayisə əlamətinə görə $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$ sırası da dağılır.

b) Göstərək ki, $\cos(i+n)$ məhduddur. Doğrudan da,

$|\cos(i+n)| = |\cos i \cos n - \sin i \sin n| \le |\cos i||\cos n| +$

$+ |\sin i||\sin n| \le |\cos i| + |\sin i| = M$

$M$ müsbət sabitdir. Buradan $\left|\frac{\cos(i+n)}{2^n}\right| \le \frac{M}{2^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2^n}$ sırası yığılır. Deməli, müqayisə əlamətinə görə $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(i+n)}{2^n}\right|$ sırası da yığılır. Deməli, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(i+n)}{2^n}$ sırası mütləq yığılır.

**Misal 3.65.** $1+z+z^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ sırasının yığılmasını tədqiq edin.

*Həlli.* Bu sıranın hədləri vuruğu $q=z$ olan həndəsi silsilə əmələ gətirir. Onda həndəsi silsilənin cəmi düsturuna əsasən $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k=\frac{1-z^n}{1-z}$. Əgər $|z|<1$ olarsa, onda aşağıdakı limit var.

$S(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}$. Deməli, verilmiş sıra $|z|<1$ dairəsində yığılır və onun cəmi $S(z)=\frac{1}{1-z}$-ə bərabərdir.

Bu sıranın müntəzəm yığılmasını tədqiq edək. $\varepsilon>0$ qeyd edək. Əgər sıra müntəzəm yığılırsa, onda elə $\exists N$ var ki, $n>N$ olduqda $\forall z\in\{|z|<1\}$ üçün $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ ödənir. Belə ki,

$|S(z)-S_n(z)|=\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1-z^n}{1-z}\right|=\left|\frac{z^n}{1-z}\right|$ olduğundan $|z|<1$ olduqda $\left|\frac{z^n}{1-z}\right|<\varepsilon$ ödənməlidir. Ancaq $n$ necə olursa-olsun, biz $z$ ədədini 1-ə yaxın götürməklə $\left|\frac{z^n}{1-z}\right|$ ifadəsinin kifayət qədər böyük olduğunu və deməli, $\varepsilon>0$-dan böyük olduğunu görərik. Bu halda $n$-nin heç bir qiymətində $|z|<1$ olduqda $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ ödənməz. Deməli, $|z|<1$ olduqda müntəzəm yığılma yoxdur.

Eyni zamanda istənilən $|z|<r<1$ olduqda sıra müntəzəm yığılar. Doğrudan da,

$$|S(z)-S_n(z)|=\left|\frac{z^n}{1-z}\right|\le\frac{|z|^n}{1-|z|}<\frac{r^n}{1-r}.$$

Buradan isə alınır ki, $n\to\infty$ olduqda $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$.

**Misal 3.66.** Verilmiş sıraların yığılma radiuslarını tapın.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos in$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n)z^n$.

*Həlli.* 1) 1) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

2) qüvvət sırası $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ şəklindədir. Burada $a_k = \begin{cases} 1, & k = n! \\ 0, & k \neq n! \end{cases}$.

Ona görə də $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}} = 1$.

3) 2)-yə analoji olaraq tapırıq ki, $R = 1$.

4) $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3+(-1)^n)^n}} = 4$ olduğundan, Koşi-Adamar düsturuna görə $R = \frac{1}{4}$.

5) $a_n = \cos in = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ olduğundan, Koşi-Adamar düsturuna görə

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{e\sqrt[n]{1+e^{-2n}}}{2^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{e}.$$

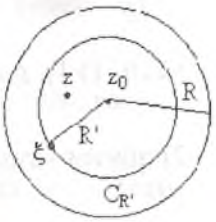
6) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n+a^n|} = \begin{cases} 1, & |a| \le 1 \\ |a|, & |a| > 1 \end{cases}$ olduğundan $R = \begin{cases} 1, & |a| \le 1 \\ \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases}$

Müəyyən dairənin daxilində analitik olan funksiyaya bu dairədə həmin funksiyaya yığılan qüvvət sırası qarşı qoymaq olarmı? Bu suala aşağıdakı teorem cavab verir.

## 10.2. Teylor teoremi

***Teylor teoremi.*** *Əgər* $f(z) \in C\infty(|z-z_0| < R)$, *onda* $|z-z_0| < R$ *olduqda* $f(z)$ *funksiyasına müntəzəm yığılan yeganə* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *qüvvət sırası var.*

*İsbatı.* ▲İxtiyarı $\forall z$ üçün $|z-z_0|<R$ götürək və mərkəzi $z_0$ nöqtəsində olan və $z$ nöqtəsini öz daxilində saxlayan $C_{R'}$ çevrəsini çəkək(şək. 31).



Şəkil 31.

İxtiyari $\forall \xi \in C_{R'}$ üçün $|\xi - z_0| = R'$, $R'<R$, $|\xi - z_0| > |z - z_0|$ və $f(z) \in C(|z-z_0|<R')$ olduğundan, Koşi düsturuna əsasən

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

$$\frac{1}{\xi - z}=\frac{1}{(\xi - z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}}=\frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

sırası $\xi$ -yə nəzərən $C_{R'}$-də müntəzəm yığılır. Deməli,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\right\}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n;$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Bu isə ayrılışın varlığını və yeganəliyini isbat edir. ▼

**Qeydlər:**

1. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ funksiyasının ayrılışını funksiyanın Teylor sırasına ayrılışı adlandırırlar.

2. Koşi teoreminə görə $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$, burada $C$ konturu $z_0$ nöqtəsini öz daxilinə alan ixtiyari hissə-hissə hamar konturdur.

Qüvvət sırasının daha ümumi şəkli Teylor sırasıdır: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$. Bu sıranın yığılma dairəsi $|z-z_0|<R$ dairəsidir.

Həqiqi analizdə olduğu kimi, kompleks analizdə də $z_0=0$ nöqtəsində aşağıdakı funksiyaların ayrılışları mühüm rol oynayır.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} z^k + \ldots$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \ldots$$

Birinci üç sıranın yığılma radiusu $R = \infty$, sonuncu iki sıranın yığılma radiusu isə $R = 1$-dir.

**Misal 3.67.** Verilmiş funksiyaları $z$ dəyişəninin dərəcələrinə görə sıraya ayırın.

a) $\frac{1}{1-z}$; b) $\frac{z^2}{z-1}$.

*Həlli.* Misalları həm alqoritm vasitəsilə, həm də həndəsi silsilənin cəmi düsturundan istifadə etməklə həll etmək olar. Verilmiş funksiyalar bütün kompleks müstəvidə $z = 1$ nöqtəsini çıxmaqla analitik olduğundan yaza bilərik:

a) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$;

b) $\frac{z^2}{1-z} = -z^2 \cdot \frac{1}{1-z} = -z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2}$, $|z| < 1$. Qeyd edək ki, burada $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $n \geq 2$ olduqda $c_n = -1$.

**Misal 3.68.** Verilmiş funksiyaları $z$ dəyişəninin dərəcələrinə görə sıraya ayırın.

$$f(z) = \frac{1}{1-az}; \quad f(z) = \frac{1}{a-z}; \quad f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

*Həlli.* Verilmiş funksiyalar sadə rasional kəsrlərdir. Onların sıraya ayrılması üçün sonsuz azalan həndəsi silsilənin $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ cəmi düsturu istifadə olunur. Birinci halda $q = az$, ikinci halda çe-

virmədən sonra $\frac{1}{a-z}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$ alırıq ki, $q=\frac{z}{a}$. Verilmiş funksiyaların ayrılışları aşağıdakı kimidir.

$$\frac{1}{1-az}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^n,\ |z|<\frac{1}{|a|}=R$$

$$\frac{1}{a-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}},\ |z|<|a|=R.$$

$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ funksiyasına fikir versək görərik ki, sağ tərəf $\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$ şəklində törəmədən ibarətdir. Ona görə də onun ayrılışını $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$ sırasını diferensiallamaqla almaq olar.

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},\ |z|<1.$$ Bunu belə də yazmaq olar: $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$.

Aydındır ki, diferensiallama prosesini təkrar etməklə istənilən natural $k$ üçün $\frac{1}{(a-z)^k}$ şəklində elementar kəsrlərin ayrılışını almaq olar.

**Misal 3.69.** Verilmiş funksiyaları $z$ dəyişəninin dərəcələrinə görə sıraya ayırın.

a) $\frac{2z-1}{z+2}$; b) $\frac{z^2-z+3}{z+2}$.

*Həlli.* a) kəsr düzgün olmadığı üçün tam hissəni ayıraq:

$$\frac{2z-1}{z+2}=\frac{2(z+2)-5}{z+2}=2-\frac{5}{z+2}$$

Alınan kəsr elementar kəsrdir. Elementar kəsrin ayrılışını yazırıq:

$$\frac{2z-1}{z+2}=2-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}=2-\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=2-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2$$

Qeyri hədləri islah etdikdən sonra alırıq:

$$2-\frac{5}{2}-5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{2},\ |z|<2$$

b) $$\frac{z^2-z+3}{z+2}=\frac{(z+2)^2-5z-1}{z+2}=\frac{(z+2)^2-5(z+2)+9}{z+2}=$$

$$=(z+2)-5+\frac{9}{z+2}=z-3+\frac{9}{z+2}$$

$$\frac{z^2-z+3}{z+2}=z-3+\frac{9}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}=z-3+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}z+\frac{9}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}.$$

Nəhayət, alarıq ki, $\frac{z^2-z+3}{z+2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}z+9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$, $|z|<2$.

Deməli, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ şəklində sıra alınmışdır, burada $c_0=\frac{3}{2}$, $c_1=-\frac{5}{4}$, $n\geq 2$ olduqda $c_n=\frac{9\cdot(-1)^n}{2^{n+1}}$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $c_0=f(0)=\frac{3}{2}$.

**Misal 3.70.** Verilmiş $\frac{z+2}{z^2-2z-3}$ funksiyasını $z_0$ nöqtəsinin ətrafında Teylor sırasına ayırın.

a) $z_0=0$; b) $z_0=1$.

*Həlli.* Kəsr düzgün kəsrdir. Onu elementar kəsrlərin cəmi şəklində göstərək.

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-3}.$$

$A$ və $B$ qeyri-müəyyən əmsallarını tapaq.

$z+2=A(z-3)+B(z+1)$

Buradan $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{5}{4}$.

Deməli, alırıq ki, $\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{z+1}+\frac{\frac{5}{4}}{z-3}$.

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},\ |z|<3.$$

Ümumi yığılma dairəsində $|z|<1$ sıraların cəmini yazırıq.

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left((-1)^{n+1}-\frac{5}{3^{n+1}}\right)\cdot z^n,\ |z|<1.$$

b) əvvəlki bənddə olduğu kimi kəsri elementar kəsrlərin cəmi kimi göstərək:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{z+1}+\frac{\frac{5}{4}}{z-3}.$$

Hər bir kəsri $(z-1)$ – in qüvvətlərinə ayıraq:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}},\ |z-1|<2$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-1-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\ |z-1|<2.$$

$|z-1|<2$ dairəsində ilkin kəsrin ayrılışını yazaq:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}\left((-1)^{n+1}-5\right)\cdot(z-1)^n,$$

$R=2$.

## §11. Analitik funksiyanın təyininin yeganəliyi

### 11.1. Düzgün nöqtə anlayışı

Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $G$-də, ola bilər ki, bəzi izolə edilmiş nöqtələrdən başqa, hər yerdə təyin olunmuşdur.

***Tərif.*** *Əgər* $G\cap\{|z-z_0|<\rho(z_0)\}$, *(*$\rho(z_0)$ *qüvvət sırasının yığılma radiusudur) çoxluğunda* $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=f(z)$ *qüvvət sırası varsa, onda* $z_0\in G$ *nöqtəsinə* $f(z)$ *funksiyasının* $G$*-də düzgün nöqtəsi*

*deyilir.* Bütün digər nöqtələr isə $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələri adlanır.

**Qeyd.** Əgər $f(z) \in C\infty(G)$, onda bütün $z \in G$ nöqtələri $f(z)$ funksiyasının düzgün nöqtələridir. Əgər $f(z)$ funksiyası $\overline{G}$-də verilmişsə, onda sərhəd nöqtələri həm düzgün, həm də məxsusi nöqtələr ola bilər.

## 11.2. Analitik funksiyanın sıfırları

Tutaq ki, $f(z) \in C\infty(G)$. Əgər $f(z_0) = 0$, onda $z_0 \in G$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının sıfırı deyilir. Bəzən aşağıdakı kimi də tərif verilir.

***Tərif.*** $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow c_0 = 0$, *olarsa, onda* $z_0 \in G$ *nöqtəsinə* $f(z)$ *funksiyasının sıfırı deyilir. Əgər* $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, $c_n \neq 0$ *olarsa, onda* $z_0 \in G$ *nöqtəsi n tərtibli sıfırdır.*

Qeyd edək ki, $n$ tərtibli sıfır üçün

$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$; $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

***Analitik funksiyanın sıfırları haqqında teorem.*** *Tutaq ki,* $f(z) \in C\infty(G)$ *və sonsuz sayda müxtəlif nöqtələrdə sıfra çevrilir:*

$z_k \neq z_k$, $z_n \in g$ *və* $f(z_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \in G$. *Onda* $f(z) \equiv 0$, $z \in G$.

*İsbatı.* ▲ $f(z)$ funksiyasının kəsilməz olmasından alınır ki,

$f(z^*) = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z^*)^n$, $|z - z^*| < \rho(z^*) \Rightarrow c_0 = 0$ və

$f(z) = (z - z^*) f_1(z)$; $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z^*)^n$; $f_1(z_n) = 0 \Rightarrow$ kəsilməzlikdən $f_1(z^*) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ və bu qayda ilə alarıq ki, $\forall n$ üçün $c_n = 0$. Deməli, $|z - z^*| < \rho(z^*)$ dairəsində $f(z) \equiv 0$, burada $\rho(z^*)$ məsafəsi $z^*$ nöqtəsindən $\partial G$-yə qədər olan məsafədən az deyil. Bütün $G$ oblastında $f(z) \equiv 0$ eyniliyi modulun maksimumluq prinsipində olduğu kimi isbat edilir.

Kifayətdir, göstərək ki, $|z-z^*|<\rho(z^*)$ dairəsindən kənarda yerləşən ixtiyari $z^{**}\in G$ nöqtə üçün $f(z^{**})=0$. $z^*$ və $z^{**}$ nöqtələrini tamamilə $G$-də yerləşən və $\partial G$-dən $d>0$ məsafəsində yerləşən $L$ hissə-hissə hamar əyrisi ilə birləşdirək. $G$-də yerləşən $|z-z^*|<\rho(z^*)$ dairəsinin ixtiyari nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının sıfırları ardıcılığının limiti kimi baxmaq mümkün olduğundan yeni ayrılış mərkəzi kimi $|z-z^*|=\rho(z^*)$ dairəsinin $L$ əyrisi ilə sonuncu kəsişmə nöqtəsi olan $z=z_1$ nöqtəsini seçsək alarıq ki, $|z-z_1|<\rho(z_1)$ dairəsinin daxilində $f(z)\equiv 0$, burada $\rho(z_1)\le d$. Bu prosesi davam etdirərək $L$ əyrisini sonlu sayda radiusu $d>0$-dən kiçik olmayan və daxilində $f(z)\equiv 0$ olan dairələrlə örtmüş olarıq. Bu zaman $z=z^{**}$ nöqtəsi sonuncu dairənin daxilinə düşür və $f(z^{**})=0$, $z=z^{**}$ nöqtəsi ixtiyari olduğundan alırıq ki, bütün $G$ oblastında $f(z)\equiv 0$. ▼

**Nəticələr.**

1. Əgər $f(z)\in C\infty(G)$ və $G$ oblastında $f(z)\neq 0$ olarsa, onda $f(z)$ funksiyasının bütün sıfırları izolə edilmiş nöqtələrdir.
2. Əgər $f(z)\in C\infty(G)$ və $G$ oblastında $f(z)\neq 0$ olarsa, onda ixtiyari qapalı $\overline{C'}\subset G$ oblastında $f(z)$ funksiyasının sonlu sayda sıfırı ola bilər.

*İsbatı.* ▲Əgər $\overline{C'}\subset G$-də sıfırlar sonsuz saydadırsa, onda onlardan $C'\subset G$-də yığılan alt ardıcıllıq seçmək olar. Bu isə o demək olar ki, bütün $G$ oblastında $f(z)\equiv 0$. Bu isə şərtə ziddir. ▼

3. Əgər $f(z)$ funksiyası tam funksiyadırsa, onda ixtiyari qapalı $\overline{C'}\subset G$ oblastında $f(z)$ funksiyasının sonlu sayda sıfırı ola bilər. Genişlənmiş kompleks müstəvidə tam funksiyanın sıfırları çoxluğu hesabi çoxluqdur və bu çoxluğun limit nöqtəsi sonsuz uzaqlaşmış nöqtədir.

### 11.3. Analitik funksiyanın təyininin yeganəliyi teoremi

*Teorem.* *Əgər* $f_1(z), f_2(z) \in C\infty(G)$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \in G$, $z_i \neq z_k$, $z_n \in g$ və $f_1(z_n) = f_2(z_n)$ *olarsa, onda* $\forall z \in G$ *üçün* $f_1(z) \equiv f_2(z)$ *olar.*

İsbat üçün analitik funksiyanın sıfırları haqqında teoremin köməyi ilə $G$ oblastında $h(z) = f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$ olduğunu göstərmək kifayətdir.

## §12.Analitik davam anlayışı

### 12.1. İki oblastın ümumi alt oblastında analitik davam

Tutaq ki, $f_1(z) \in C\infty(G_1)$ və $f_2(z) \in C\infty(G_2)$, verilmişdir. $G_1 \cap G_2 = G_{12} \neq \{\varnothing\}$ işarə edək və fərz edək ki, $f_1(z) \equiv f_2(z)$, $z \in G_{12}$. Onda $f_2(z)$ funksiyasına $f_1(z)$ funksiyasının $G_2$ oblastına $G_{12}$ ümumi alt oblastı vasitəsi ilə ***analitik davamı*** deyilir. Analitik funksiyanın yeganəliyi teoremindən alınır ki, əgər analitik davam varsa, onda o yeganədir.

Bu zaman $G = G_1 \cup G_2$-də yeganə analitik $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$ funksiyası $(F(z) \in C\infty(G))$ var. $F(z)$ funksiyasına $f_1(z) \in C\infty(G_1)$ funksiyasının $G_1 \subset G$ oblastına analitik davam deyilir.

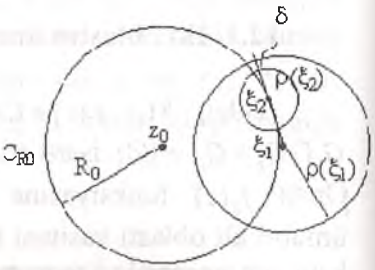
Analitik davamı qüvvət sıralarının köməyi ilə yerinə yetirmək olar.

Tutaq ki, $f(z) \in C\infty(G)$ və $z_0 \in G$ nöqtəsi $G$ çoxluğunun daxili nöqtəsidir. Başqa sözlə, $G$ çoxluğunun və qüvvət sırasının yığılma dairəsinin $|z - z_0| < \rho(z_0)$ ümumi hissəsində $f(z)$ funksiyasına yığılan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ qüvvət sırası var. Əgər $\rho(z_0)$ məsafəsi $z_0$ nöqtəsindən $\partial G$-yə qədər olan məsafədən böyükdürsə, onda yığılma dairəsi $G$ oblastının sərhədindən kənara çıxacaq və biz

$f(z) \in C\infty(G)$ funksiyasının daha böyük oblasta $G \cup \{|z - z_0| < \rho(z_0)\}$ analitik davamı olan $F(z)$ funksiyasını alarıq.

***Teorem.*** *Qüvvət sırasının yığılma dairəsinin* $|z - z_0| < R_0$ *sərhədində kompleks dəyişənli analitik funksiyanın heç olmazsa, bir məxsusi nöqtəsi –yığılma dairəsinin daxilində sıranın cəmi var.*

*İsbatı.* ▲Əksini fərz etməklə isbat edək. Fərz edək ki, ixtiyari $\xi$ nöqtəsi $|\xi - z_0| = R_0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $f(z) \in C\infty\{|z - z_0| < R_0\}$ funksiyasının düzgün nöqtəsidir. Başqa sözlə, $\forall \xi$ üçün $\exists \rho(\xi)$: $|z - z_0| < R_0 \cap \{|\xi - z_0| < \rho(\xi)\}$ çoxluğunda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi)(z - \xi)^n = f(z)$ ödənir. Göstərək ki, $\rho(\xi) > 0$ funksiyası $\xi \in C_{R_0}$ – da kəsilməz funksiyadır. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\rho(\xi_1) > \rho(\xi_2)$ və elə $\exists \delta > 0$ var ki,



Şəkil 32.

$$\rho(\xi_1) > \rho(\xi_2) + |\xi_1 - \xi_2| + \delta \qquad (1)$$

ödənir. Bu, isə o deməkdir ki, $|z - \xi_2| < \rho(\xi_2)$ dairəsi $|z - \xi_1| < \rho(\xi_1)$ dairəsinin daxilində yerləşir. Ancaq üç dairənin ümumi hissəsində $\{|z - z_0| < R_0\} \cap \{|z - \xi_1| < \rho(\xi_1)\} \cap \{|z - \xi_2| < \rho(\xi_2)\}$ bütün üç qüvvət sırası eyni bir $f(z) \in C\infty\{|z - z_0| < R_0\}$ funksiyasına yığılır. Bu o deməkdir ki, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_2)(z - \xi_2)^n$ qüvvət sırası daha böyük oblasta davam etdirilə bilər, başqa sözlə, qüvvət sırası $\rho(\xi_2)$ radiuslu dairədə yığılır. $\rho(\xi_2)$ isə $\xi_2$ nöqtəsindən $|z - \xi_1| < \rho(\xi_1)$ dairəsinin sərhədinə qədər olan məsafədən az deyil. Yəni $\rho(\xi_2) \geq \rho(\xi_1) - |\xi_1 - \xi_2| + \delta$. Onda (1)-dən alırıq ki, $\rho(\xi_1) > \rho(\xi_1) + \delta$ və $\delta > 0$ olduğunu nəzərə alsaq, ziddiyyət alırıq(şək. 32). Bu isə $\rho(\xi)$ funksiyasının $C_{R_0}$ – da kəsilməz olmaması haqda əks fərziyyəmizin nəticəsidir. Deməli, $|\rho(\xi_1) - \rho(\xi_2)| \leq |\xi_1 - \xi_2|$. Yəni $\rho(\xi)$ funksiyası kəsilməzdir. Kəsil-

məz $\rho(\xi) > 0$ funksiyası $_0|\xi - z_0| = R$ qapalı çoxluğunda özünün aşağı sərhədini alır, başqa sözlə, elə $\xi^*$ nöqtəsi var ki, $\forall \xi \in C_{R_0}$ üçün $\rho(\xi) \geq \rho(\xi^*)$. Lakin fərziyyəmizə görə $\forall \xi \in C_{R_0}$ üçün $\rho(\xi) > 0$ olmasından alınır ki, $\rho(\xi^*) = \rho_0 > 0$. $\rho(\xi^*) \geq \rho_0$ olmasından alınır ki, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ funksiyası $|z - z_0| < R_0$ olduqda $|z - z_0| < R_0 + \rho_0$ dairəsinə analitik davam etdirilə bilər. Deməli, qüvvət sırasının ilkin yığılma radiusu $R_0$ deyil, $R_0 + \rho_0$ olmalıdır. Bu isə teoremin şərtinə ziddir. Bu ziddiyyəti fərziyyəmizin nəticəsi olaraq aldıq. Deməli, $C_{R_0}$ -da elə bir məxsusi $\xi^{**}$ nöqtəsi var ki, $\rho(\xi^{**}) = 0$. ▼

***Nəticə.*** *Yığılma dairəsinin radiusu yığılma dairəsinin mərkəzindən sıranın yığıldığı analitik funksiyanın ən yaxın məxsusi nöqtəsinə qədər olan məsafə ilə müəyyən edilir.*

**Misal 3.71.** Sıranı araşdırın.

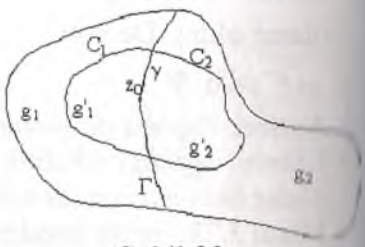
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}; \ |z| < 1.$$

*Həlli.* Sıranın cəminin məxsusi nöqtələri aydındır ki, $z_{1,2} = \pm i$. Buradan görünür ki, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyasının $\forall x$ üçün kəsilməz və istənilən tərtibdən məhdud törəmələrinin olmasına baxmayaraq, onun $x = 0$ nöqtəsinin ətrafında qüvvət sırasına ayrılışı nə üçün $-1 < x < 1$ olduqda mütləq, $|x| = 1$ olduqda şərti yığılır və $|x| > 1$ olduqda dağılması aydın olur.

## 12.2. İki oblastın ümumi sərhədində analitik davam

***Teorem.*** *Tutaq ki,* $f_i(z) \in C\infty(G_i)$, $i = 1,2$ *və* $f_i(z) \in C\infty(G_i \cup \Gamma)$, $f_1|_\Gamma = f_2|_\Gamma$. *Onda* $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \cup \Gamma \\ f_2(z), & z \in G_2 \cup \Gamma \end{cases}$ *funksiyası üçün* $F(z) \in C\infty(G = G_1 \cup G_2 \cup \Gamma)$ *doğrudur.*

*İsbatı.* ▲ İsbat üçün kifayətdir ki, göstərək $\forall z_0 \in \Gamma$ nöqtəsi $F(z)$ funksiyası üçün düzgün nöqtədir. $\forall z_0 \in \Gamma$ götürək və hissə-hissə hamar $C = C_1(\subset G_1) \cup C_2(\subset G_2)$; $C \subset G$ konturunu quraq(şək. 33). Koşi tipli inteqrala baxaq: $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi \in C\infty(G' \subset G)$. $\Phi(z)$ funksiyası $z \notin C$ olduqda $C$ – də kəsilməzdir, onda $z_0$ nöqtəsi $\Phi(z)$ funksiyası üçün düzgün nöqtədir. Tutaq ki, $z_1 \in G_1'$. Onda $\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup \gamma^-} \frac{F(\xi)}{\xi - z_1} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup \gamma^-} \frac{F(\xi)}{\xi - z_1} d\xi$. $z_1 \in G_1'$ olduğundan ikinci toplanan sıfra bərabərdir. Buradan alırıq ki, $\Phi(z_1) = F(z_1)$. Analoji olaraq $z_2 \in G_2'$ olduqda alarıq ki, $\Phi(z_2) = F(z_2)$. Kəsilməzlikdən alarıq ki, $F(z_0) = \Phi(z_0)$. Bu isə o deməkdir ki, $z_0 \in \Gamma$ nöqtəsi $F(z)$ funksiyası üçün düzgün nöqtədir. ▼



Şəkil 33.

## §13. Həqiqi oxda analitik davam

### 13.1. Kompleks dəyişənli elementar funksiyalar

Tutaq ki, $[a;b]$ parçası $z$ kompleks müstəvisinin $G$ oblastına ($[a;b] \subset G$) daxildir. Onda analitik funksiyanın təyininin yeganəliyi teoreminə əsasən $[a;b]$ parçasında verilmiş $f(x)$, $x \in [a;b]$ qiymətlərini alan yeganə $f(z) \in C\infty(G)$ funksiyası var. Əgər belə $f(z)$ funksiyası varsa, onda ona həqiqi oxda verilmiş həqiqi dəyişənli funksiyanın kompleks müstəviyə analitik davamı deyilir. Ümumiyyətlə, $f(x)$ həqiqi dəyişənli kompleks funksiyadır. Analitik funksiyaların xassələrinə əsasən $f(x)$ funksiyası $x$ – ə nəzərən sonsuz diferensiallanan olmalıdır.

Həqiqi dəyişənli elementar funksiyalar aşağıdakılardır.

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}$; $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ -tam funksiyaları uyğun $\sin x, \cos x, e^x$ funksiyalarının kompleks müstəviyə analitik davamıdırlar.

## 13.2. Münasibətlərin analitik davamı

*Teorem 1. Tutaq ki,* $w_i = f_i(z) \in C\infty(G)$ *və* $[a;b] \subset G$, $w_i \in D_i$, $\Phi(z) = F[w_1,...,w_n]$ *funksiyası hər bir* $w_i \in D_i$ *dəyişəninə nəzərən analitikdir. Onda* $F[f_1(x),...,f_n(x)] = 0$, $x \in [a;b]$ *münasibətlərindən* $F[f_1(z),...,f_n(z)] = 0$, $z \in G$ *münasibətləri alınır.*

*İsbatı.* ▲İsbat üçün $\Phi(z) \in C\infty(G)$ olduğunu göstərmək kifayətdir. $n = 2$ halı üçün isbat edək. Ümumi halda isə isbat analojidir.

$$\Delta\Phi = F[f_1(z+\Delta z), f_2(z+\Delta z)] - F[f_1(z), f_2(z)] =$$
$$= F[f_1(z+\Delta z), f_2(z+\Delta z)] - F[f_1(z), f_2(z+\Delta z)] +$$
$$+ F[f_1(z), f_2(z+\Delta z)] - F[f_1(z), f_2(z)] =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial w_1}\Delta w_1 + \frac{\partial F}{\partial w_2}\Delta w_2 + \xi(z)\left(o\left(\sqrt{(\Delta w_1)^2 + (\Delta w_2)^2}\right)\right)$$

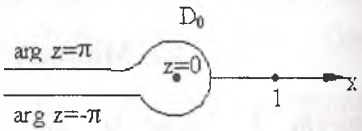
$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\xi(z)}{\Delta z} = 0$. Burada $\Delta z \to 0$ olduqda limitə keçsək alarıq ki, $\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{\partial F}{\partial w_1}f_1'(z) + \frac{\partial F}{\partial w_2}f_2'(z)$. Bu isə o deməkdir ki, $\Phi(z) \in C\infty(G)$. ▼

**Misallar** 1. Məlum $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ münasibətindən $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ alınır.

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ münasibətindən $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ münasibəti alınır. Liuvill teoreminə əsasən $|\cos z|$ və $|\sin z|$ bütün kompleks müstəvidə qeyri-məhduddur.

3. $\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$; $e^{\ln x} = x$, $x > 0$.

$D_0$ oblastında (şək. 34) $f(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ qeyri-müəyyən inteqrala baxaq. Bilirik ki, $\frac{1}{\xi} \in C\infty(\xi \neq 0)$. İnteqral ixtiyari yol üzrə var və $f(z) \in C\infty(D_0)$ funksiyası $\ln x\,(x > 0)$ funksiyasının analitik davamıdır. Deməli, $f(z) = \ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} \in C\infty(D_0)$. Teorem 1-ə əsasən $\forall z \in D_0$ üçün $e^{\ln z} = z$.



Şəkil 34.

***Teorem 2.*** *Tutaq ki,* $w_i = f_i(z) \in C\infty(G_i)$ *və* $[a_i;b_i] \subset G_i$, $w_i \in D_i$, $\Phi(z) = F[w_1,...,w_n]$ *funksiyası hər bir* $w_i \in D_i$ *dəyişəninə nəzərən analitikdir. Onda* $F[f_1(x_1),...,f_n(x_n)] = 0$, $x_i \in [a_i;b_i]$ *münasibətlərindən* $F[f_1(z_1),...,f_n(z_n)] = 0$, $z_i \in G_i$ *münasibətləri alınır.*

***İsbatı.*** ▲ $n = 2$ halı üçün isbat edək. Ümumi halda isə isbat analojidir. $x_2 \in [a_2;b_2]$-ni (*) qeyd edək və $\Phi_1(z_1) = F[f_1(z_1), f_2(x_2)] \in C\infty(G_1)$. Teorem 1 və (*)-dan alırıq ki, $\Phi_1(z_1) = 0$, $z_1 \in G_1$. $x_2 \in [a_2;b_2]$ ixtiyari olduğundan alırıq ki, $F[f_1(z_1), f_2(x_2)] = 0$, $z_1 \in G_1$. İndi isə $z_1 \in G_1$-i qeyd edək və $\Phi_2(z_2) = F[f_1(z_1), f_2(z_2)] \in C\infty(G_2)$ funksiyasına baxaq. $x_2 \in [a_2;b_2]$ olduğundan $\Phi_2(z_2) = 0$, $z_2 \in G_2$. Buradan alırıq ki, $F[f_1(z_1), f_2(z_2)] = 0$, $z_2 \in G_2$. $z_1 \in G_1$ ixtiyari olduğundan $F[f_1(z_1), f_2(z_2)] = 0$, $z_1 \in G_1$, $z_2 \in G_2$. ▼

## 13.3. Riman səthi anlayışı

$w = f(z) = e^z$ funksiyası $e^x$ funksiyasının bütün kompleks müstəviyə analitik davamıdır. Belə ki, $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ olmasından $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ olması alınır. Xüsusi halda, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = w$ olma-

sından $|w| = e^x$, $\arg w = y$ alınır, yəni $w = e^z$ üstlü funksiyası $z$ müstəvisində $y = y_0$ düz xəttini $w$ müstəvisində $\arg w = y_0$ şüasına inikas etdirir. Başqa sözlə, $G_0(-\pi < \operatorname{Im} z < \pi) \leftrightarrow D_0(-\pi < \arg w < \pi)$ inikası var. Tərs funksiya isə $z = \ln w = x + iy = \ln|w| + i \arg w$ funksiyasıdır.

Analoji olaraq $G_1(\pi < \operatorname{Im} z < 3\pi) \leftrightarrow D_1(\pi < \arg w < 3\pi)$. $z$ nöqtəsi $\operatorname{Im} z = \pi$ vasitəsilə fasiləsiz $G_0$ – dən $G_1$ – ə keçdikdə onun obrazının fasiləsiz $D_0$ – dən $D_1$ – ə keçməsi üçün $\arg w = \pi$ ümumi qiymətinə uyğun olan kəsiklərin hər iki kənarını yapışdırmaq lazımdır. Nəticədə yeni həndəsi çoxobrazlı – $D_0$ və $D_1$ vərəqlərindən ibarət iki vərəqli Riman səthini alarıq.

Analoji olaraq
$G_n((2n-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2n+1)\pi) \leftrightarrow D_n((2n-1)\pi < \arg w < (2n+1)\pi)$. Nəticədə tam kompleks müstəvinin sonsuz vərəqli Riman səthinə inikasını alarıq. Bu Riman səthi $D_n$ vərəqlərinin yapışdırılmasından ibarətdir. Belə ki, $D_n$ vərəqi $D_{n+1}$ və $D_{n-1}$ vərəqlərinin $\arg w$ funksiyasının eyni qiymətlər aldığı sərhədlər boyunca yapışdırılmışdır. Bu Riman səthində $z = Lnw = \ln|w| + iArgw$, $-\infty < Argw < \infty$ funksiyası təyin edilmişdir.

Adi $w$ müstəvisində $z = Lnw$ funksiyası sonsuz qiymətlidir (çoxqiymətli). Hər bir vərəqdə müəyyən bir budaq $\ln_n w$ var. $w = e^z = e^{Lnw}$. $w = e^z$ funksiyası periodu $2\pi i$ olan periodik funksiyadır: $e^z = e^{z+2\pi i}$. $w = e^z$ sonsuz vərəqli (çox vərəqli) funksiyadır.

### 13.4. Budaqlanma nöqtəsi anlayışı

*$w = 0$ nöqtəsinin xüsusi rolu haqqında.* $w \neq 0$ nöqtəsi ilə kifayət qədər kiçik qapalı kontur boyunca hərəkət etdikdə biz həmişə eyni bir $D_n$ vərəqində qalırıq və ya bu vərəqə qayıdırıq, iki dəfə kəsiyi keçərək $D_{n-1}(D_{n-1})$ vərəqinə giririk. Bu zaman keçiddən sonra $\ln_n w$ funksiyasının qiyməti dəyişmir. $w = 0$ nöqtəsi boyunca hərəkət etdikdə kəsiyi yalnız bir dəfə keçərək eyni bir $\ln_n w$ budağında

qalaraq ( $\ln_n w_0 = \ln|w_0| + i\arg w_0$, $(2n-1)\pi < \arg w_0 < (2n+1)\pi$ ) digər budağa $\ln_{n-1} w$ keçərik ( $\ln_{n-1} w_0 = \ln|w_0| + i\arg w_0$, $(2n-3)\pi < \arg w_0 < (2n-1)\pi$ ). $w=0$ nöqtəsinə $z = Lnw$ funksiyasının budaqlanma nöqtəsi deyilir. $z = Lnw$ üçün $w=0$ budaqlanma nöqtəsi sonsuz tərtiblidir. Analoji xüsusiyyətlərə $w=\infty$ -sonsuz uzaqlaşmış nöqtəsi də malikdir.

***Tərif.*** *Əgər $z_0$ nöqtəsi üçün onun elə $\varepsilon$ ətrafını göstərmək mümkündürsə ki, bir dəfə $z_0$ nöqtəsini onun $\varepsilon$ ətrafına daxil olan ixtiyari qapalı kontur üzrə keçid zamanı çoxqiymətli funksiyanın bir budağından digər budağına keçmək mümkün olsun, onda $z_0$ nöqtəsinə verilmiş çoxqiymətli funksiyanın budaqlanma nöqtəsi deyilir.*

Budaqlanma nöqtəsinin ətrafında çoxqiymətli funksiyanının ayrı-ayrı budaqlarına ayrıca birqiymətli funksiya kimi baxmaq olmaz. Çünki budaqlanma nöqtəsini keçərkən onların qiymətləri dəyişir.

1. $w = f_1(z) = \sqrt{z}$ və $w = f_2(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ funksiyaları üçün uyğun olaraq $z=0$ və $z=\pm 1$ nöqtələri ikinci tərtibdən budaqlanma nöqtələridir.

2. $f(z) = z^\alpha$, $\alpha$ – ixtiyari həqiqi və ya kompleks ədəddir.

$f(z) = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha(\ln|z| + iArgz)}$.

$\alpha = n$ olduqda $e^{in(\arg z + 2\pi k)} = e^{in\arg z}$. Buradan alınır ki, $f(z) = z^\alpha$ funksiyası bir qiymətlidir (ancaq çoxvərəqli - $n$ -vərəqlidir).

$\alpha = \frac{n}{m}$ olduqda $f(z) = z^\alpha$ funksiyası $m$ müxtəlif qiymət alır (çox qiymətlidir).

$\alpha$ – irrasional və ya kompleks olduqda $f(z) = z^\alpha$ funksiyası sonsuz sayda qiymətlər alır (çox qiymətlidir).

$1^i = e^{iLn1} = e^{i(\ln|1| + 2\pi k)} = e^{-2\pi k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Bütün triqonometrik funksiyalar sonsuz vərəqli periodik funksiyalardır.

## § 14. Loran sırası

### 14.1. Loran sırasının yığılma halqası

***Tərif.*** $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ *sırasına* $f(z)$ *funksiyasının Loran sırası deyilir.*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=P(z)+Q(z)$$

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ ,\ Q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

$P(z)$ – Loran sırasının düzgün hissəsi, $Q(z)$ - Loran sırasının baş hissəsi adlanır. $P(z)\in C\infty(|z-z_0|<R_1)$.

Hansı oblastda $Q(z)$ analitik funksiya olacaqdır?

$\frac{1}{z-z_0}=\xi$ əvəzləməsi aparaq. Onda alarıq:

$Q(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\xi^n\in C\left(|\xi|<\frac{1}{R_2}\right)$, burada $\frac{1}{R_2}$ ilə alınan sıranın yığılma radiusunu işarə etdik. $R_2<R_1$ olduqda ümumi yığılma oblastı -dairəvi halqa var: $R_2<|z-z_0|<R_1$.

***Abel teoreminin nəticəsi.***

1. $\sum_{n=\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\in C(R_2<|z-z_0|<R_1)$.

2. Loran sırasının dairəvi yığılma halqasının daxilində sıranı hədbəhəd istənilən tərtibdən diferensiallamaq və inteqrallamaq olar və bu zaman alınan sıralar da $R_2<|z-z_0|<R_1$ dairəsində analitik olacaqlar.

3. $R_1$ ədədi $\{c_n\}, n=0,1,...,\infty$ ədədləri ilə ifadə olunur. $R_1 = 1/L_1$, $L_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ və ya $L_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, $R_2$ ədədi isə $\{c_{-n}\}, n=1,...,\infty$ ədədləri ilə ifadə olunur: $R_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$ və ya $R_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$.

4. Loran sırasının əmsalları $c_n$ – lər sıranın $z_0$ nöqtəsində cəminin qiymətləri vasitəsi ilə müəyyən olunmurlar. $z_0$ nöqtəsində Loran sırasının cəmi müəyyən olunmamışdır.

## 14.2. Dairəvi halqada kompleks dəyişənli funksiyanın Loran sırasına ayrılışı

***Teorem 1.*** *(kompleks dəyişənli funksiyanın Loran sırasına ayrılması haqqında). Əgər* $f(z) \in C\{R_2 < |z-z_0| < R_1\}$, *onda funksiya bu halqada Loran sırasına* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ *birqiymətli şəkildə ayrılandır.*

*İsbatı.* ▲İxtiyari $z$ nöqtəsini $R_2 < |z-z_0| < R_1$ halqasının daxilində qeyd edək və mərkəzi $z_0$ nöqtəsində radiusları uyğun olaraq $R_1'$ və $R_2'$ olan $C_1' : |\xi - z_0| = R_1'$ və $C_2' : |\xi - z_0| = R_2'$ çevrələrini quraq. Qurmaya görə $R_2 < R_2' < |z-z_0| < R_1' < R_1$ olar. Çoxrabitəli oblast üçün Koşi düsturuna görə

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1'^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2'^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = P(z) + Q(z)$$

$C_1' : |\xi - z_0| = R_1'$ çevrəsi üzərində $\left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| \le q < 1$ bərabərsizliyi ödənir.

Ona görə $\frac{1}{\xi - z}$ kəsrini belə göstərmək olar:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

Sıra $\xi$ – yə nəzərən $C_R$-də müntəzəm kəsilməz olduğundan (Teylor teoreminin isbatına bax) hədbəhəd inteqrallasaq alarıq

$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, burada $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1''} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $n \geq 0$.

$C_1'' : |\xi - z_0| = R_2'$ çevrəsi üzərində $\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ bərabərsizliyi ödənir.

Ona görə $\frac{1}{\xi - z}$ kəsrini belə göstərmək olar:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

Sıranı hədbəhəd inteqrallasaq alarıq

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad n > 0, \text{ burada } c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2''} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi.$$

İnteqrallama istiqamətini dəyişsək alarıq:

$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2''} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi$. $c_{-n}$ və $c_n$-də inteqralaltı funksiyalar $R_2 < |z - z_0| < R_1$ halqasında analitikdirlər. Ona görə də Koşi teoreminə əsasən intqeralaltı funksiyaların analitiklik oblastında inteqrallama konturlarını ixtiyari şəkildə deformasiyası zamanı inteqralların qiymətləri dəyişməz. Bu isə ümumi şəkildə

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ($C$ konturu $R_2 < |z - z_0| < R_1$ halqasında yerləşən ixtiyari qapalı konturdur), yazmağa imkan verir. Beləliklə, $f(z)$ funksiyası üçün

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ yazmaq olar. Burada $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$.

$z$ nöqtəsi $R_2<|z-z_0|<R_1$ halqası daxilində ixtiyari nöqtə olduğundan alırıq:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ sırası $f(z)$-ə hər yerdə halqa daxilində yığılır və $R_2<R_2'\le|z-z_0|\le R_1'<R_1$ qapalı halqasında müntəzəm yığılır.

Yeganəliyi isbat edək. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, digər bir $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ var ki, heç olmazsa bir əmsal üçün $c_n\neq c_n'$ ödənir. Onda $R_2<|z-z_0|<R_1$ halqasının daxilində hər yerdə $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ bərabərliyi ödənir. Mərkəzi $z_0$ nöqtəsində radiusu $R$ olan $C_R$ çevrəsini quraq: $R_2<R<R_1$. Onda $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ və $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n'(z-z_0)^n$ sıraları $C_R$-də müntəzəm yığılır. Hər iki sıranı $(z-z_0)^{-m-1}$, $\forall m\in Z$ ifadəsinə vuraq və hədbəhəd inteqrallayaq. $\int_{C_R}(z-z_0)^{n-m-1}dz$ inteqralını hesablayaq. $z-z_0=\mathrm{Re}^{i\varphi}$ götürsək, alarıq:

$R^{n-m}i\int_0^{2\pi}e^{(n-m)i\varphi}d\varphi=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 2\pi i, & n=m\end{cases}$ buradan alırıq ki, $\forall m\in Z$ üçün $c_m=c_m'$. ▼

Praktiki məsələlərdə yeri gəldikcə, elementar funksiyaların Teylor sırasına ayrılışından istifadə edilir. Bunlar aşağıdakılardır.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$ch z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$sh z = z + \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Bu ayrılışlar $|z| < \infty$ olduqda doğrudur.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

Bu ayrılışlar isə $|z| < 1$ olduqda doğrudurlar

**Misal 3.72.** $f(z) = z \cos \frac{z}{z-1}$ funksiyasını $z_0 = 1$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırasına ayırın.

*Həlli.* Bu funksiyanı $(z-1)$ dəyişəninin funksiyası kimi göstərək.

$$f(z) = (z-1+1)\cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = (z-1)\cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) + \cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) =$$

$$= (z-1)\left(\cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin \frac{1}{z-1}\right) + \cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin \frac{1}{z-1}$$

İndi isə $\frac{1}{z-1}$ ifadəsini dəyişən kimi qəbul edib, $\left|\frac{1}{z-1}\right| < \infty$ şərti daxilində elementar funksiyaların ayrılışlarından istifadə edək. $\left|\frac{1}{z-1}\right| < \infty$ olmasından alınır ki, $|z-1| > 0$. Deməli, bizim mülahizələrimiz $0 < |z-1| < \infty$ halqası daxilində doğrudur. Onda alarıq:

$$\cos \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{(z-1)^4} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \ldots$$

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(z-1)^3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \ldots$$

Bunları nəzərə alsaq:

$$f(z)=(z-1)\cos 1\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-1)^4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots\right)-$$

$$-(z-1)\sin 1\left(\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots\right)+$$

$$+\cos 1\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(z-1)^4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots\right)-$$

$$-\sin 1\left(\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots\right)$$

alarıq. Mötərizələri açırıq və eyni dərəcəli hədləri toplayırıq. Onda alarıq

$$f(z)=\cos 1(z-1)-\frac{\cos 1}{2(z-1)}+\frac{\cos 1}{24(z-1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n-1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}\cos 1}{(2n+2)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots-\sin 1+\frac{\sin 1}{6(z-1)^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}+\ldots+$$

$$+\cos 1-\frac{\cos 1}{2(z-1)^2}+\frac{\cos 1}{24(z-1)^4}+\ldots+\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots-$$

$$-\frac{\sin 1}{(z-1)}+\frac{\sin 1}{6(z-1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots=$$

$$=\cos 1(z-1)+(\cos 1-\sin 1)-\frac{\cos 1+2\sin 1}{2(z-1)}-\frac{3\cos 1-\sin 1}{6(z-1)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{\cos 1+4\sin 1}{24(z-1)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n((2n+1)\cos 1-\sin 1)}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}+\ldots+$$

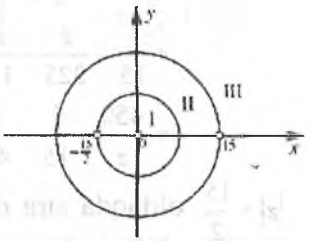
$$+\frac{(-1)^{n+1}((\cos 1+(2n+2)\sin 1)}{(2n+2)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots$$

**Misal 3.73.** $z$ dəyişəninin dərəcələrinə nəzərən $f(z)=\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$ funksiyasının bütün Loran sırasına ayrılışlarını tapın.

*Həlli.* Bu halda $z_0=0$ qəbul etmək lazımdır. $f(z)$ funksiyası üç məxsusi nöqtəyə malikdir: $z_0=0$, $z_1=-\dfrac{15}{2}$, $z_2=15$. Deməli, mər-

kəzi $z_0 = 0$ nöqtəsində olan üç halqa vardır və $f(z)$ funksiyası bunların hər birində analitikdir:

1) $0 < |z| < \frac{15}{2}$; 2) $\frac{15}{2} < |z| < 15$; 3) $15 < |z| < \infty$.



Şəkil 35.

$f(z)$ funksiyası üçün bu halqaların hər birində Loran sırasını tapaq(şək. 35).

Əvvəlcə $f(z)$ funksiyasını elementar kəsrlərin cəmi şəklində göstərək:

$$f(z) = \frac{450}{z} - \frac{2}{15+2z} + \frac{1}{15-z}.$$

Bu sadə kəsrləri aşağıdakı kimi çevirək

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{2}{15\left(1+\frac{2z}{15}\right)} = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{15}} = \frac{2}{15}\left(1 - \frac{2z}{15} + \frac{4z^2}{225} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^n z^n}{15^n} + \ldots\right)$$

$\left|\frac{2z}{15}\right| < 1$ olduqda, başqa sözlə, $|z| < \frac{15}{2}$ olduqda alırıq:

$$\frac{2}{15+2z} = \frac{2}{15} - \frac{4z}{225} + \frac{8z^3}{15^3} - \ldots + \frac{(-1)^n 2^{n+1} z^n}{15^{n+1}} + \ldots$$

Analoji olaraq $|z| < 15$ olduqda alırıq:

$$\frac{1}{15-z} = \frac{1}{15\left(1-\frac{z}{15}\right)} = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{15}} = \frac{1}{15}\left(1 + \frac{z}{15} + \frac{z^2}{225} + \ldots + \frac{z^n}{15^n} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{z}{225} + \frac{z^2}{15^3} + \ldots + \frac{z^n}{15^{n+1}} + \ldots$$

Bunları $f(z) = \frac{450}{z} - \frac{2}{15+2z} + \frac{1}{15-z}$ ifadəsində nəzərə alsaq və oxşar həddləri islah etsək, $0 < |z| < \frac{15}{2}$ halqasında funksiyanın Loran sırasına ayrılışı üçün aşağıdakı ifadəni alarıq

$$f(z)=\frac{450}{z}-\frac{2}{15}+\frac{4z}{225}-\frac{8z^3}{15^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{n+1}z^n}{15^{n+1}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{15}+\frac{z}{225}-\frac{z^2}{15^3}+\ldots+\frac{z^n}{15^{n+1}}+\ldots=$$
$$=\frac{450}{z}-\frac{1}{15}+\frac{z}{45}-\frac{7z^2}{15^3}+\ldots+\frac{(1+(-1)^{n+1}2^{n+1})z^n}{15^{n+1}}+\ldots$$

$|z|>\frac{15}{2}$ olduqda sıra dağılır. Ona görə də $\frac{2}{15+2z}$ ifadəsini başqa şəkildə göstərək.

$$\frac{2}{15+2z}=\frac{2}{2z\left(1+\frac{15}{2z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{15}{2z}}$$

Onda $|z|>\frac{15}{2}$ olduqda alarıq:

$$\frac{2}{15+2z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{15}{2z}+\frac{225}{4z^2}-\ldots+\frac{(-1)^n15^n}{2^nz^n}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{z}-\frac{15}{2z^2}+\frac{225}{4z^3}-\ldots+\frac{(-1)^n15^n}{2^nz^{n+1}}+\ldots$$

$\frac{15}{2}<|z|<15$ halqasında $f(z)$ funksiyasının Loran sırasına ikinci ayrılışını alırıq:

$$f(z)=\frac{450}{z}-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z^3}+\ldots+\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}+\frac{(-1)^{n+1}15^n}{2^nz^{n+1}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{15}+\frac{z}{225}+\frac{z^2}{15^3}+\ldots+\frac{z^n}{15^{n+1}}+\ldots=\ldots+\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}+\ldots-$$
$$-\frac{225}{4z^3}+\frac{15}{2z^2}+\frac{449}{z}+\frac{1}{15}+\frac{z}{225}+\frac{z^2}{15^3}+\ldots+\frac{z^n}{15^{n+1}}+\ldots$$

Analoji olaraq $|z|>15$ olduqda $\frac{1}{15-z}$ kəsrini aşağıdakı kimi çevirsək, alırıq:

$$\frac{1}{15-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{15}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{15}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{15}{z}+\frac{225}{z^2}+\ldots+\frac{15^n}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{15}{z^2}-\frac{225}{z^3}-\ldots-\frac{15^n}{z^{n+1}}-\ldots$$

Bu sıra $|z|>15$ olduqda yığılır.

$15<|z|<\infty$ halqasında $f(z)$ funksiyasının Loran sırasına üçüncü ayrılışını alırıq:

$$f(z)=\frac{450}{z}-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z^3}+\ldots+\frac{(-1)^n15^{n-1}}{2^{n-1}z^n}+\frac{(-1)^{n+1}15^n}{2^nz^{n+1}}+\ldots-$$

$$-\frac{1}{z}-\frac{15}{z^2}-\frac{225}{z^3}-\ldots-\frac{15^n}{z^{n+1}}-\ldots=$$

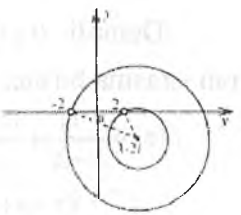
$$=\frac{448}{z}-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1125}{4}\cdot\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{15^{n-1}((-1)^n-2^{n-1})}{2^{n-1}z^n}+\ldots$$

**Misal 3.74.** $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}$ funksiyasının $z-(3-2i)$ fərqinin dərəcələrinə nəzərən bütün Loran sırasına ayrılışlarını tapın.

*Həlli.* Bu funksiyanı aşağıdakı kimi göstərək

$$f(z)=\frac{2z}{z^2-4}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}.$$

Bu funksiyanın iki məxsusi nöqtəsi var. $z_1=2$ və $z_2=-2$. Deməli, mərkəzi $z_0=3-2i$ nöqtəsində olan üç halqa var və $f(z)$ funksiyası bunların hər birində analitikdir(şək. 36):



Şəkil 36.

1) $0\le|z-3+2i|<\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}$;

3) $\sqrt{29}<|z-3+2i|<\infty$.

İndi isə bundan əvvəlki misalda olduğu kimi əvvəlcə sadə kəsrləri aşağıdakı kimi çevirək.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-3+2i)+3-2i-2}=\frac{1}{(1-2i)+(z-3+2i)}=\frac{1}{1-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3+2i}{1-2i}}$$

Deməli, $\left|\frac{z-3+2i}{1-2i}\right|<1$ olduqda, başqa sözlə $|z-3+2i|<\sqrt{5}$ olduqda verilmiş kəsri aşağıdakı kimi sıraya ayırmaq olar.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1-2i}\left(1-\frac{z-3+2i}{1-2i}+\frac{(z-3+2i)^2}{(1-2i)^2}-\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{1-2i}+\frac{(z-3+2i)}{3+4i}+\frac{(z-3+2i)^2}{11-2i}-\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}}+\ldots$$

Analoji olaraq

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-3+2i)+3-2i+2}=\frac{1}{(5-2i)+(z-3+2i)}=\frac{1}{5-2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3+2i}{5-2i}}$$

Deməli, $\left|\frac{z-3+2i}{5-2i}\right|<1$ olduqda, başqa sözlə $|z-3+2i|<\sqrt{29}$ olduqda verilmiş kəsri aşağıdakı kimi sıraya ayırmaq olar.

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{5-2i}\left(1-\frac{z-3+2i}{5-2i}+\frac{(z-3+2i)^2}{(5-2i)^2}-\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{5-2i}-\frac{(z-3+2i)}{21-20i}+\frac{(z-3+2i)^2}{65-142i}+\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}+\ldots$$

Deməli, $0\le|z-3+2i|<\sqrt{5}$ halqasında $f(z)$ funksiyasının Loran sırasına birinci ayrılışını alırıq:

$$f(z)=\frac{1}{1-2i}+\frac{(z-3+2i)}{3+4i}+\frac{(z-3+2i)^2}{11-2i}+\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(1-2i)^{n+1}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{5-2i}-\frac{(z-3+2i)}{21-20i}+\frac{(z-3+2i)^2}{65-142i}+\ldots+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{54+68i}{145}+\frac{-126+120i}{841}(z-3+2i)+\ldots+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}+\frac{1}{(5-2i)^{n+1}}\right)(z-3+2i)^n+\ldots$$

$|z-3+2i|>\sqrt{5}$ olduqda sıra dağılır. $\frac{1}{z-2}$ funksiyasını başqa cür göstərək.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(1-2i)+(z-3+2i)}=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1-2i}{z-3+2i}}$$

Onda

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3+2i}\left(1-\frac{1-2i}{z-3+2i}+\frac{(1-2i)^2}{(z-3+2i)^2}-\ldots+\frac{(-1)^n(1-2i)^n}{(z-3+2i)^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z-3+2i}-\frac{1-2i}{(z-3+2i)^2}+\frac{-3-4i}{(z-3+2i)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n(1-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\ldots$$

Deməli, $\left|\dfrac{1-2i}{z-3+2i}\right|<1$ olduqda, başqa sözlə $|z-3+2i|>\sqrt{5}$ olduqda verilmiş sıra yığılır.

İndi isə $\sqrt{5}<|z-3+2i|<\sqrt{29}$ halqasında $f(z)$ funksiyasının Loran sırasına ikinci ayrılışını alırıq:

$$f(z)=\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(1-2i)^{n-1}}{(z-3+2i)^n}+\ldots-\frac{3+4i}{(z-3+2i)^3}+\frac{-1+2i}{(z-3+2i)^2}+$$

$$+\frac{1}{z-3+2i}+\frac{1}{5-2i}-\frac{(z-3+2i)}{21-20i}+\frac{(z-3+2i)^2}{65-142i}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n(z-3+2i)^n}{(5-2i)^{n+1}}+\ldots$$

$|z-3+2i|>\sqrt{29}$ sıra dağılır. Onda

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(5-2i)+(z-3+2i)}=\frac{1}{z-3+2i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5-2i}{z-3+2i}}.$$

Deməli,

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-3+2i}\left(1-\frac{5-2i}{z-3+2i}+\frac{(5-2i)^2}{(z-3+2i)^2}+\ldots+\frac{(-1)^n(5-2i)^n}{(z-3+2i)^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z-3+2i}-\frac{5-2i}{(z-3+2i)^2}+\frac{21-20i}{(z-3+2i)^3}+\ldots+\frac{(-1)^n(5-2i)^n}{(z-3+2i)^{n+1}}+\ldots$$

Bu sıra isə $\left|\dfrac{5-2i}{z-3+2i}\right|<1$ olduqda, başqa sözlə $|z-3+2i|>\sqrt{29}$ olduqda yığılır. Bu sıraları tərəf-tərəf toplasaq $\sqrt{29}<|z-3+2i|<\infty$

halqasında $f(z)$ funksiyasının Loran sırasına üçüncü ayrılışını alırıq:

$$f(z)=\frac{2}{z-3+2i}-\frac{6-4i}{(z-3+2i)^2}+\frac{18-24i}{(z-3+2i)^3}+\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}((1-2i)^{n-1}+(5-2i)^{n-1})}{(z-3+2i)^n}+\ldots$$

**Misal 3.75.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ funksiyasını $z=2$ və $z=3$ nöqtələri ətrafında Loran sırasına ayırın.

*Həlli.* $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ funksiyası $z=2$ və $z=3$ nöqtələrindən başqa bütün kompleks müstəvidə analitikdir. Bu nöqtələrdən $|z|=2$, $|z|=3$ çevrələrini keçirək. Bu funksiya $|z|<2$ dairəsində, $2<|z|<3$ halqasında və $|z|>3$ dairəsinin xaricində analitikdir və ona görə də bu oblastlarda onu sıraya ayırmaq olar. Funksiyanı $2<|z|<3$ halqasında Loran sırasına ayıraq:

$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k z^k$, $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C\dfrac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ burada $C:|\xi|=\rho$, $2<\rho<3$ müsbət istiqamətli çevrədir.

Əslində $c_k$-ları hesablamaq üçün belə mürəkkəb düsturdan istifadə etməyə həmişə eytiyac yoxdur. Bəzən aşağıdakı qaydadan istifadə etmək əlverişli olur. Ayrılışı zəruri olan funksiyanı elə sadə funksiyaların cəmi şəklində göstərirlər ki, toplananların hər birini $z-z_0$ fərqinin mənfi və ya müsbət qüvvətlərinə ayırmaq mümkün olsun. Bu üsuldan istifadə edək. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$ şəklində göstərək və hər bir toplananı $z$ dəyişəninin qüvvətlərinə ayıraq:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{-1}{3\left(z-\dfrac{z}{3}\right)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}},$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\ldots\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}.$$

Bunları yuxarıda nəzərə alsaq alarıq:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{z^k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}.$$

**Misal 3.76.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ funksiyasını $z=1$ və $z=2$ nöqtələri əirafında Loran sırasına ayırın.

*Həlli.* $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ funksiyası $z=1$ və $z=2$ nöqtələrindən başqa bütün kompleks müstəvidə analitikdir. Deməli, $1<|z|<2$ halqasında analitikdir və ona görə də bu oblastlarda onu Loran sırasına ayırmaq olar. Funksiyanı sadə kəsrlərin cəmi şəklində göstərək:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$\dfrac{1}{z-2}$ kəsri $|z|<2$ dairəsində analitikdir və dəyişənin müsbət dərəcəli qüvvətlərinə ayrılır:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$\dfrac{1}{z-1}$ kəsri $|z|>1$ dairəsinin xaricində analitikdir və dəyişənin müsbət dərəcəli qüvvətlərinə ayrılır:

$$\frac{-1}{z-1}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

Nəticədə alırıq:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

Bu funksiya üçün digər obla stlarda başqa ayrılışları almaq olar. Məsələn, bu funksiya $|z|<1$ oblastında analitikdir və Teylor sırasına ayrılır:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=$$

$$=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

Bu funksiyanı $0<|z-1|<1$ halqasında ($z_0=1$ nöqtəsinin ətrafında) $(z-1)$-in qüvvətlərinə ayıraq:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

Beləliklə, eyni funksiya üçün müxtəlif ayrılışlar almaq olar. Bu, ayrılışın yeganəliyinə zidd deyil. Çünki alınmış ayrılışlar müxtəlif oblastlar üçündür.

## §15. Analitik funksiyanın məxsusi nöqtələri

### 15.1. Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtələr. Polyus

***Tərif.*** *Əgər $f(z)$ funksiyası birqiymətli və $f(z)\in C\infty\{0<|z-z_0|<\rho(z_0)\}$ olarsa və $z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün məxsusi nöqtə olarsa, onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının izolə olunmuş məxsusi nöqtəsi deyilir.*

Tərifi başqa cür belə də demək olar.

Əgər $z_0$ nöqtəsinin elə ətrafı varsa ki, bu ətrafda $f(z)$ funksiyası $z_0$ nöqtəsindən başqa hər yerdə analitikdir, onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsi deyilir.

$z_0$ məxsusi nöqtəsinin özündə funksiya təyin olunmaya da bilər.

$f(z)$ funksiyasını $z_0$ nöqtəsinin ətrafında $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ halqasında yığılan Loran sırasına ayırmaq olar. $f(z)$ funksiyasının

özünü $z_0$ nöqtəsinin ətrafında necə aparması Loran sırasının baş hədd olan $Q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ ifadəsindən asılıdır.

**Qeyd.** Budaqlanma nöqtəsinin kiçik ətrafında və izolə edilməmiş məxsusi nöqtədə funksiyanı Loran sırasına ayırmaq mümkün deyil.

Burada üç hal mümkündür:

a) $\forall n>0$ üçün $c_{-n}=0$; $Q(z)=0$; $z\to z_0$ olduqda $f(z)\to c_0$ olarsa, onda $z_0$ nöqtəsi aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir. $z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının düzgün nöqtəsidir. Əgər funksiya $z_0$ nöqtəsində təyin olunmayıbsa, onda onun kəsilməzliyindən istifadə edib $f(z_0)=c_0$ götürməklə $z_0$ nöqtəsində təyin etmək olar. Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtənin ətrafında $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$: $|f(z)|<M$ və $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $m\geq 0$ – tam ədəddir, $\varphi(z)\neq 0$; və əgər $\lim_{z\to z_0} f(z)=0$ olarsa, onda $z_0$ nöqtəsi $m$ tərtibli sıfır adlanır.

*Teorem 1. Əgər* $f(z)\in C\infty\{0<|z-z_0|<\rho(z_0)\}$ *və* $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ *olduqda* $|f(z)|<M$ *olarsa, onda* $z_0$ *nöqtəsi aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir.*

*İsbatı.* ▲ $f(z)$ funksiyasını Loran sırasına ayıraq və əmsallar üçün olan

$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho^{z_0}} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi$, $n>0$ ifadəsinə baxaq.

İnteqrallama konturu kimi mərkəzi $z_0$ nöqtəsində olan və radiusu $\rho:|\xi-z_0|=\rho$ olan dairə götürək. Onda $\xi-z_0=\rho e^{i\varphi}$, $d\xi=i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ əvəzləməsi aparıb, $e^{in\varphi}=1$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq: $\rho\to 0$ olduqda $|c_{-n}|<M\rho^{n-1}\to 0$. $c_{-n}$ əmsalları $\rho$ – dan asılı olmadığından $c_{-n}=0$ alırıq. ▼

b) $f(z)$ funksiyasının Loran sırası onun izolə edilmiş məxsusi nöqtəsinin ətrafında dərəcəsi mənfi olan sonlu sayda həddə malikdir.

$$Q(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n};\ c_m\neq 0$$

$z \to z_0$ olduqda $f(z) \to \infty$ olarsa, $z_0$ nöqtəsi *m tərtibli polyus* adlanır, $f(z) = \dfrac{\psi)z)}{(z-z_0)^m}$; $\psi(z_0) \neq 0$.

***Teorem 2.*** *Əgər* $f(z) \in C\infty\{0 < |z-z_0| < \rho(z_0)\}$, $z_0$ *nöqtəsi* $f(z)$ *funksiyasının izolə olunmuş məxsusi nöqtəsidir və* $z \to z_0$ *olduqda* $|f(z)| \rightrightarrows \infty$ *(z nöqtəsinin* $z_0$ *nöqtəsinə yaxınlaşma üsulundan asılı olmayaraq) olarsa, onda* $z_0$ *nöqtəsi* $f(z)$ *funksiyasının polyusudur.*

*İsbatı.* ▲ $z \to z_0$ olduqda $|f(z)| \rightrightarrows \infty$ olmasından alınır ki, $\forall A > 0$ üçün $\exists \varepsilon$: $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ olmasından $|f(z)| > A$ alınır. $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ funksiyasına baxaq; $g(z) \in C\infty\{0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$; $|g(z)| < \dfrac{1}{A} = M$. Buradan alınır ki, $z_0$ nöqtəsi $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir (teorem 1-ə əsasən). Deməli, $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $m \geq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$. Buradan alırıq ki, $f(z) = \dfrac{\psi)z)}{(z-z_0)^m}$; $\psi(z_0) \neq 0$. ▼

## 15.2. Vacib məxsusi nöqtə. Soxotski-Veyerştrass teoremi

**c)** Əgər $f(z)$ funksiyasının Loran sırası onun izolə olunmuş $z_0$ məxsusi nöqtəsinin ətrafında sonsuz sayda $z-z_0$ fərqinin mənfi dərəcəli qüvvətlərindən ibarət hədləri varsa (sonsuz sayda həddi üçün $c_{-n} \neq 0$), onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının vacib məxsusi nöqtəsi deyilir. Vacib məxsusi nöqtənin ətrafında analitik funksiyanın özünü necə aparmasını aşağıdakı teorem müəyyən edir.

***Teorem (Soxotski-Veyerştrass).*** *İxtiyari B kompleks ədədi və* $\forall \varepsilon > 0$ *üçün* $z_0$ *məxsusi nöqtəsinin* $\forall \eta$ $(0 < |z-z_0| < \eta)$ *ətrafında elə bir* $z_1$ *nöqtəsi var ki,* $|f(z_1) - B| < \varepsilon$ *ödənir.*

*İsbatı.* ▲Əksini fərz etməklə isbat edək. Tutaq ki, elə $\varepsilon_0$ və $\eta_0$ var ki, $\forall z$ $(0<|z-z_0|<\eta_0)$ üçün $|f(z)-B|>\varepsilon_0$ ödənir. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-B}$ funksiyasına baxaq. Onda yaza bilərik. $|g(z)|=\dfrac{1}{|f(z)-B|}<\dfrac{1}{\varepsilon_0}=M$. Buradan alırıq ki, $z_0$ nöqtəsi $g(z)$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir (teorem 1-ə əsasən). Deməli, $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $m\geq 0$, $\varphi(z_0)\neq 0$. Buradan alırıq ki, $f(z)=B+\dfrac{\psi)z)}{(z-z_0)^m}$; $\psi(z_0)\neq 0$. Buradan isə alınır ki, $z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün ya $m>0$ olduqda polyus, ya da $m=0$ olduqda düzgün nöqtədir. Ziddiyətə gəlib çıxdıq.▼

**Misal.** $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiyası üçün $z=0$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir.

*Tərif. Əgər* $\exists R>0$ *varsa ki,* $\forall z$ *üçün* $|z|>R$ *olarsa və* $f(z)$ *funksiyasının* $z=0$ *nöqtəsindən sonlu məsafədə yerləşən məxsusi nöqtələri yoxdursa, onda* $z_\infty$ *nöqtəsi birqiymətli analitik funksiyanın təcrid edilmiş məxsusi nöqtəsi adlanır.*

$z_\infty$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırası: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$, $R<|z|<\infty$.

a) Əgər $n>0$ olduqda bütün $c_n=0$, $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}c_nz^n$ və ya $z\to\infty$ olduqda $f(z)$ funksiyasının sonlu limiti varsa, olarsa, onda $z_\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilə məxsusi nöqtədir.

b) Əgər $f(z)$ funksiyasının $z_\infty$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırası sonlu sayda müsbət dərəcəli hədlərə malikdirsə, $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{m}c_nz^n$, $m>0$ və ya $z\to\infty$ olduqda $f(z)\to\infty$ olarsa, onda $z_\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün polyusdur.

v) Əgər $f(z)$ funksiyasının $z_\infty$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırası sonsuz sayda müsbət dərəcəli hədlərə malikdirsə, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ və ya $z\to\infty$ olduqda $f(z)$ funksiyası sonlu və ya sonsuz limitə malik deyilsə, onda $z_\infty$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün vacib məxsusi nöqtədir.

İzolə edilmiş nöqtələrin təsnifatına aid misalların həllində bəzən aşağıdakı mahiyyətcə eyni olan təsnifatdan istifadə etmək əlverişli olur.

İzolə olunmuş məxsusi nöqtələrin təsnifatı (limit dilində).

Tutaq ki, $z_0$ nöqtəsi $f(z)\in C\infty\{0<|z-z_0|<\rho(z_0)\}$ funksiyasının izolə olunmuş məxsusi nöqtəsidir.

1) Əgər $f(z)$ funksiyasının $z_0$ nöqtəsində sonlu limiti varsa, yəni $\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$, $|c_0|<\infty$ olarsa, onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtəsi deyilir.

2) Əgər $f(z)$ funksiyasının $z_0$ nöqtəsində limiti $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ olarsa, onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının polyusu deyilir.

3) Əgər $f(z)$ funksiyasının $z_0$ nöqtəsində sonlu və ya sonsuz limiti olmazsa, onda $z_0$ nöqtəsinə $f(z)$ funksiyasının vacib məxsusi nöqtəsi deyilir.

**Misal 3.77.** $f(z)=\dfrac{e^{z^5}-1}{e^{z^5}-1-z}$ funksiyası üçün $z_0=0$ məxsusi nöqtəsinin tipini müəyyən edin.

*Həlli.* Funksiyanı $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ kəsri şəklində göstərək. Burada $\lambda(z)=e^{z^5}-1$, $\mu(z)=e^{z^5}-1-z$. $z_0=0$ nöqtəsi bu funksiyaların hər ikisinin sıfırıdır. Bu funksiyaları Teylor sırasına ayıraq.

$$\lambda(z)=e^{z^5}-1=1+z^5+\frac{z^{10}}{2}+\ldots-1=z^5+\frac{z^{10}}{2}+\ldots$$

Buradan görünür ki, $\lambda(0)=\lambda'(0)=\lambda''(0)=\lambda'''(0)=\lambda^{(4)}(0)=0$, $\lambda^{(5)}(0)\neq 0$. Deməli, $z_0=0$ nöqtəsi $\lambda(z)=e^{z^5}-1$ funksiyası üçün $k=5$ tərtibli sıfırdır.

$$\mu(z)=e^z-1-z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots-1-z=\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2}+\ldots$$

Eyni zamanda $z_0=0$ nöqtəsi $\mu(z)=e^z-1-z$ funksiyası üçün $l=2$ tərtibli sıfırdır. Alırıq ki, $k>l$, deməli, $z_0=0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir.

**Misal 3.78.** $f(z)=z\cos\frac{2}{z^3}$ funksiyası üçün $z_0=0$ məxsusi nöqtəsinin tipini müəyyən edin.

*Həlli.* Funksiyanı $z_0=0$ nöqtəsinin ətrafında Loran sırasına ayıraq.

$$f(z)=z\cos\frac{2}{z^3}=z\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{z^6}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{16}{z^{12}}-\ldots\right)=z-\frac{2}{z^5}+\frac{2}{3z^{11}}-\ldots$$

Görürük ki, ayrılışda sonsuz sayda mənfi dərəcəli həd var. Ona görə də tərifə əsasən, $z_0=0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün vacib məxsusi nöqtədir.

**Misal 3.79.** $f(z)=\frac{\sin\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$ funksiyası üçün izolə edilmiş məxsusi nöqtələri tapın və onların tipini müəyyən edin.

*Həlli.* Funksiyanın məxsusi nöqtələri aşağıdakılardır: $0$, $\pm1$, $\pm i$. Onların tipini müəyyən edək.

$f(z)$ funksiyasının $z\to0$ olduqda limitini tapaq. Əvvəlcə həqiqi ox boyunca $z\to0+$ olduqda limiti tapaq. Başqa sözlə, $z=x$, $x>0$. Onda

$$\lim_{\substack{z\to0\\z=x>0}}f(z)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin\pi x}{x^4-1}e^{\frac{1}{x}}=-1\cdot\lim_{x\to+0}(\pi x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=$$

$$=-\pi\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=-\pi\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=-\pi\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty$$

Biz burada $x\to0$ olduqda $\sin\pi x\sim\pi x$ ekvivalentliyindən və Lopital qaydasından istifadə etdik.

İndi isə həqiqi ox boyunca $z\to0-$ olduqda limiti tapaq. Başqa sözlə, $z=x$, $x<0$. Onda

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x<0}} f(z)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin \pi x}{x^4-1}e^{\frac{1}{x}}=-1\cdot\lim_{x\to -0}(\pi x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=$$

$$=-\pi\lim_{x\to -0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=-\pi\lim_{t\to -\infty}\frac{e^t}{t}=-\pi\lim_{t\to -\infty}\frac{e^t}{1}=0$$

Aldıq ki, sağ və sol limitlər müxtəlifdir. Deməli, $f(z)$ funksiyasının $z\to 0$ olduqda limiti, ümumiyyətlə, yoxdur. Bu isə o deməkdir ki, $z_0=0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün vacib məxsusi nöqtədir.

İndi isə $z_1=1$ olduqda limiti hesablayaq.

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z^2+1)}\cdot\frac{\sin \pi z}{(z-1)}=\frac{e}{2\cdot 2}\lim_{z\to 1}\frac{\sin(\pi(z-1)+\pi)}{(z-1)}=$$

$$=\frac{e}{4}\lim_{z\to 1}\frac{-\sin(\pi(z-1))}{(z-1)}=-\frac{e}{4}\lim_{z\to 1}\frac{\pi(z-1)}{(z-1)}=-\frac{\pi e}{4}$$

Limit var və sonludur. Deməli, $z_1=1$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir.

Analoji olaraq $z_2=-1$ nöqtəsi üçün alırıq

$$\lim_{z\to -1} f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z^2+1)}\cdot\frac{\sin \pi z}{(z+1)}=\frac{e^{-1}}{-2\cdot 2}\lim_{z\to -1}\frac{\sin(\pi(z+1)-\pi)}{(z+1)}=$$

$$=\frac{e^{-1}}{4}\lim_{z\to -1}\frac{\sin(\pi(z+1))}{(z+1)}=\frac{e^{-1}}{4}\lim_{z\to -1}\frac{\pi(z+1)}{(z+1)}=\frac{\pi e}{4}$$

Bu da o deməkdir ki, $z_2=-1$ nöqtəsi də $f(z)$ funksiyası üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir.

İndi isə $z_3=i$ olduqda limiti hesablayaq. $f(z)$ funksiyasını $f(z)=\frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ kəsri şəklində göstərək. Burada $\lambda(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}\sin \pi z}{(z+i)(z^2-1)}$, $\mu(z)=z-i$. Hesablayaq: $\lambda(i)=\frac{e^{-i}\sin \pi i}{-2\cdot 2i}\neq 0$, $\mu(i)=0$, $\mu'(i)=1\neq 0$. Deməli, $z_3=i$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur.

Analoji olaraq $z_4 = -i$ üçün $f(z) = \frac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, $\lambda(z) = \frac{e^z \sin \pi z}{(z-i)(z^2-1)}$,

$\mu(z) = z + i$. $\lambda(i) = \frac{e^i \sin(-\pi i)}{-2 \cdot (-2i)} \neq 0$, $\mu(-i) = 0$, $\mu'(-i) = 1 \neq 0$. Deməli, $z_3 = i$ nöqtəsi də bir tərtibli polyusdur.

**Misal 3.80.** $f(z) = \frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$ funksiyası üçün izolə edilmiş məxsusi nöqtələri tapın və onların tipini müəyyən edin.

*Həlli.* $\lambda(z) = \sin 3z$ və $\mu(z) = z(1-\cos z)$ funksiyaları bütün kompleks müstəvidə analitikdir. Deməli, $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələri məxrəcin sıfırlarıdır, başqa sözlə, $\mu(z) = 0$ nöqtələridir. Belə nöqtələr sonsuz çoxdur. Birinci bu $z_0 = 0$ nöqtəsidir, eləcə də $1 - \cos z = 0$ tənliyinin köklərdir. Buradan isə $\cos z = 1$ və $z = Arc\cos 1 = -iLn(1+0) = -i(0 + i \cdot 0 + 2\pi ki) = 2\pi n$, $n \in Z$.

Qeyd edək ki, $n = 0$ olduqda $z_0 = 0$ alınır. Beləliklə, $z_n = 2\pi n$, $n \in Z$. $z_0 = 0$ olduqda alırıq

$\lambda(z) = \sin 3z$, $\lambda(0) = 0$

$\lambda'(z) = 3\cos 3z$, $\lambda'(0) = 3 \neq 0$

$k = 1$. $\mu(z) = z(1-\cos z)$, $\mu(0) = 0$

$\mu'(z) = 1 - \cos z + z \sin z$, $\mu'(0) = 0$

$\mu(z) = 2\sin z + z\cos z$, $\mu''(0) = 0$

$\mu(z) = 3\cos z - x\sin z$, $\mu'''(0) = 3 \neq 0$.

Məxrəcin sıfırının tərtibi $l = 3$. Yəni $z_0 = 0$ nöqtəsi $l - k = 2$ tərtibli polyusdur. $z_n = 2\pi n$, $n \neq 0$. $\lambda(z_n) = 0$, $\lambda'(z_n) = 3 \neq 0$ Surətin sıfırının tərtibi $k = 1$. $\mu(z_n) = 0$, $\mu'(z_n) = 0$, $\mu''(z_n) = 2\pi n \neq 0$. Deməli, $z_n = 2\pi n$ nöqtələri $n \neq 0$ olduqda bir tərtibli polyuslardır.

**Misal 3.81.** $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ funksiyası üçün izolə edilmiş məxsusi nöqtələri tapın və onların tipini müəyyən edin.

*Həlli.* Tənliyi həll edirik. $\sin\frac{1}{z}=0$, $\frac{1}{z}=\pi n$, $n\in Z$

$z_n=\frac{1}{\pi n}$, $n\in Z$. $f(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələri $z_0=0$ nöqtəsi və $z_n=\frac{1}{\pi n}$, $n\in Z$, $n\neq 0$ nöqtələridir. Lakin $n\to\infty$ olduqda görürük ki, $z_n\to 0$. Deməli, $z_0=0$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafında $f(z)$ funksiyasının sonsuz çoxlu məxsusi nöqtələri var. $z_0=0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsi deyil. $z_n=\frac{1}{\pi n}$ nöqtələri isə izolə edilmiş məxsusi nöqtələrdir. Əgər $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\sin\frac{1}{z}$ işarə etsək, onda

$\varphi(z)=\sin\frac{1}{z}$, $\varphi(z_n)=0$,

$\varphi'(z)=-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}$, $\varphi'(z_n)=-\pi^2n^2(-1)^n\neq 0$.

Deməli, $z_n=\frac{1}{\pi n}$ nöqtələri $\varphi(z)=\sin\frac{1}{z}$ funksiyası üçün bir tərtibli sıfırlardır. Onda $f(z)$ funksiyası üçün bu nöqtələr bir tərtibli polyuslardır.

## § 16. Analitik funksiyanın izolə edilmiş məxsusi nöqtədə çıxığı anlayışı

Tutaq ki, $z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının izolə edilmiş məxsusi nöqtəsidir.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n;\ 0<|z-z_0|<\rho,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi.$$

***Tərif.*** $res[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)d\xi$ *kompleks ədədinə* $f(z)$ *funksiyasının* $z_0$ *nöqtəsində çıxığı deyilir.*

Burada $C^+$ konturu $f(z)$ funksiyasının analitiklik oblastından çıxmamaq şərti ilə $z_0$ nöqtəsini daxilinə ala bilən qapalı konturdur.

Aydındır ki, $res[f(z),z_0]=c_{-1}$.

### 16.1. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremi

***Teorem.*** *Tutaq ki,* $f(z)\in C\infty\{\overline{G}\setminus z_1,z_2,...,z_N\}$ *sonlu* $N$ *sayda izolə olunmuş məxsusi nöqtəni çıxmaq şərti ilə hər yerdə analitikdir. Onda* $\int_{\partial G} f(z)dz=2\pi i\sum_{n=1}^{N} res[f(z),z_n]$

*İsbatı.* ▲Əgər $f(z)\in C\infty\{\overline{G}\}$, onda $\partial G$ – nin bütün nöqtələri $f(z)$ üçün düzgün nöqtələrdir. $f(z)$ funksiyasının hər bir izolə olunmuş $z_n$ nöqtəsini ayrı-ayrılıqda bir qapalı $\gamma_n$ konturu ilə ayıraq. $\partial G$ və $\gamma_n$ konturları ilə məhdudlaşmış bu çox rabitəli oblastda $f(z)$ fun-

ksiyası hər yerdə analitikdir. Onda çoxrabitəli oblast üçün Koşi teoreminə əsasən

$$\int_{\partial G} f(z)dz + \sum_{n=1}^{N} \int_{\gamma_n^-} f(z)dz = 0 .$$

Burada ikinci toplananı bərabərliyin sağına keçirsək, inteqrallama istiqamətini əksinə dəyişsək və çıxığın tərifini nəzərə alsaq:

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} res[f(z), z_n]$$ alarıq. ▼

## 16.2. Polyusda çıxıqların hesablanması düsturları

Çıxıqları hesablamaq üçün əsasən aşağıdakı qaydalar mövcuddur

a) əgər $z_0$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədirsə, onda

$$res[f(z), z_0] = 0 .$$

b) əgər $z_0$ nöqtəsi $m$ tərtibli polyusdursa, onda yaza bilərik:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 \ldots$$

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots$$

$$res[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z \to z_0)^m f(z) \right].$$

Xüsusi halda, $m = 1$ olduqda

$$res[f(z), z_0] = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} \left[ (z \to z_0) f(z) \right].$$

Əgər $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z) = (z-z_0)\psi'(z_0) + \ldots$,

$\psi(z_0) \neq 0$. Onda $res[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

c) əgər $z_0$ vacib məxsusi nöqtədirsə, onda

$$res[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\xi)d\xi .$$

### 16.3. Funksiyasının sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə çıxığı

Funksiyasının sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə çıxığı

$res[f(z), z_\infty] = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)d\xi$ düsturu ilə hesablanır.

Əgər $z_\infty$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədirsə, onda çıxıq sıfırdan fərqli ola bilər.

Məsələn, $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$. $z_\infty$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir.

$res[f(z), z_\infty] = -c_{-1} = -1 \neq 0$.

Tam kompleks müstəvidə analitik funksiyanın $z_\infty$ nöqtəsindəki bütün çıxıqlarının, sonlu sayda izolə olunmuş nöqtələrini çıxmaq şərti ilə, cəmi sıfra bərabərdir.

## § 17. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin həqiqi dəyişənli funksiyaların I növ qeyri-məxsusi inteqrallarının hesablanmasına tətbiqi

***Lemma 1.*** *Tutaq ki,* $f(z) \in C\infty\{|z| > R_0 \cap \operatorname{Im} z > 0\}$ *sonlu sayda izolə olunmuş məxsusi nöqtəni çıxmaq şərti ilə analitikdir və* $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $\delta > 0$. *Onda* $\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} f(\xi)d\xi = 0$.

*Burada* $C'_R$ *konturu* $|z| = R \cap \operatorname{Im} z > 0$ *yarımdairəsidir.*

*İsbatı.* ▲ $R > R_0$ olduqda

$$\left|\int_{C'_R} f(\xi)d\xi\right| \leq \int_{C'_R} |f(\xi)|ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^\delta} \to 0,\ R \to \infty \text{ olduqda. } \blacktriangledown$$

**Qeydlər:**

1. Əgər $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ olduqda Lemma 1-in şərtləri ödənərsə, onda $\lim_{R\to\infty}\int_{C''_R} f(\xi)d\xi = 0$. Burada $C''_R$ konturu $|z| = R \cap (\varphi_1 < \arg z < \varphi_2)$ sektorunda yerləşən çevrə qövsüdür.

2. Əgər $f(z)$ funksiyası $z_\infty$ nöqtəsinin ətrafında analitikdirsə və $z_\infty$ nöqtəsi ən azı iki tərtibli sıfırdırsa, onda Lemma 1-in şərtləri ödənər.

***Teorem 1.*** *Tutaq ki,* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *çoxluğunda sonlu sayda* $z_n$ *izolə olunmuş məxsusi nöqtələrə malik* $f(z)$ *analitik davamı olan, həqiqi oxda məxsusi nöqtələri olmayan və Lemma 1-in şərtlərini ödəyən* $f(x)$ *funksiyası* $-\infty < x < \infty$ *olduqda verilmişdir. Onda aşağıdakı I növ qeyri-məxsusi iteqral var:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} res[f(z), z_n]$$

*İsbatı.* ▲ $R > R_0$ olduqda $\{-R < x < R\} \cup C_R' \{|z| = R \cap \operatorname{Im} z > 0\}$ konturunu götürək. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə əsasən yaza bilərik:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R'} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} res[f(z), z_n] \qquad (1)$$

Ancaq Lemma 1-ə əsasən

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} f(\xi)d\xi = 0$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfi $R$ – dən asılı olmadığına görə alırıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} res[f(z), z_n] \cdot \blacktriangledown$$

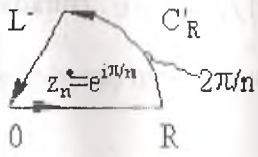
**Qeydlər:** 1. Əgər $f(x)$ funksiyası cütdürsə ($f(-x) = f(x)$)və teorem 1-in şərtlərini ödəyirsə, onda

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{n=1}^{N} res[f(z), z_n]$$

2. $f(x)$ funksiyasının aşağı yarımmüstəviyə analitik davamı aşağı yarımmüstəvi üçün analoji Lemma 1-in şərtlərini ödəyirsə, onda analoji teorem də doğrudur.

**Misal 4.82.** Qeyri-məxsusi inteqralı hesablayın.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}; \quad f(z) = \frac{1}{1+z^n};$$



Şəkil 37.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i res\left[\frac{1}{1+z^n}, e^{\frac{i\pi}{n}}\right] = \left(z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}} \text{ (şək. 37) 1-ci tərtib polyusdur }\right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{ne^{\frac{i\pi(n+1)}{n}}} = \frac{2\pi i}{ne^{\frac{i\pi}{n}}}.$$

Digər tərəfdən

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{0}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(\xi)d\xi + \int_{L^-} f(z)dz.$$

$R \to \infty$ olduqda ikinci toplanan sıfra yığılır (Lemma 1-in qeydinə əsasən). Üçüncü toplananda $z = xe^{\frac{i2\pi}{n}}$ $\left(f\left(xe^{\frac{i2\pi}{n}}\right) = f(x)\right)$

$R \to \infty$ olduqda alarıq:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^{\infty} f(x)dx = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{2\pi i}{ne^{\frac{\pi i}{n}}}$$

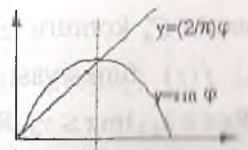
Buradan isə alarıq:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = -\frac{2\pi i}{ne^{-\frac{\pi i}{n}}\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

***Lemma 2(Jordan).*** *Əgər* $f(z) \in C\infty\{|z| > R_0 \cap \operatorname{Im} z > 0\}$ *çoxluğunda sonlu sayda* $z_n$ *izolə olunmuş məxsusi nöqtələri çıxmaq şərti ilə hər yerdə analitik və* $|z| \to \infty$ *olduqda müntəzəm* $f(z) \rightrightarrows 0$ *(*$\arg z$ *-ə görə müntəzəm* $0 \le \arg z \le \pi$*),* $z \in \operatorname{Im} z > 0$*, onda* $a > 0$ *olduqda*

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi = 0$, *burada* $C_R'$ *konturu* $|z| = R \cap \operatorname{Im} z > 0$ *yarımçevrədir.*

*İsbatı.* ▲ $\forall \varepsilon > 0$ üçün $\exists R : |z| > R$ olduqda $|f(z)| < R(\varepsilon)$, $R \to \infty$ olduqda $R(\varepsilon) \to 0$ $R > R_0$ olduqda



Şəkil 38.

$$\left|\int_{C_R'} e^{i\alpha\xi} f(\xi)d\xi\right| \le \int_{C_R'} \left|e^{i\alpha\xi} f(\xi)\right| ds \le$$

$$\left.\begin{cases} \xi = \mathrm{Re}^{i\varphi} = x+iy,\ x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ ds = Rd\varphi \\ e^{i\alpha\xi} = e^{i\alpha(x+iy)} = e^{i\alpha x}e^{-\alpha y},\left|e^{i\alpha\xi}\right| = e^{-\alpha y} = e^{-\alpha R\sin\varphi} \end{cases}\right\} \text{(şək. 38)}$$

$$\le \varepsilon R\int_0^{\pi}\left|e^{i\alpha\xi}\right|d\varphi = \varepsilon R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi}d\varphi = 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\varphi}d\varphi <$$

$$\left\{0 \le \varphi \le \frac{2}{\pi} \quad \text{olduqda} \quad \varphi\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi\right\}$$

$$< 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R\varphi}{\pi}}d\varphi = \varepsilon\pi\frac{1-e^{-\alpha R}}{a} \to 0,\ R\to\infty \text{ olduqda}$$

$R\to\infty$ olduqda $\varepsilon(R)\to 0\,(a>0)$. ▼

**Qeydlər:**

**1.** Əgər $f(z)$ funksiyası Jordan lemmasının şərtlərini $\mathrm{Im}\,z \le 0$ olduqda ödəyərsə, onda $a<0$ olduqda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R''} e^{i\alpha\xi} f(\xi)d\xi = 0$, burada $C_R'$ konturu $|z| = R \cap \mathrm{Im}\,z < 0$ yarımçevrədir.

**2.** Əgər $f(z)$ funksiyası Jordan lemmasının şərtlərini $\mathrm{Re}\,z \ge 0$ olduqda ödəyərsə, onda $a = i\alpha\ (\alpha>0)$ olduqda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{-\alpha\xi} f(\xi)d\xi = 0$, burada $C_R'$ konturu $|z| = R \cap \mathrm{Re}\,z > 0$ yarımçevrədir.

**3.** Əgər $f(z)$ funksiyası Jordan lemmasının şərtlərini $\mathrm{Re}\,z \le 0$ olduqda ödəyərsə, onda $a = -i\alpha\ (\alpha>0)$ olduqda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'} e^{\alpha\xi} f(\xi)d\xi = 0$, burada $C_R'$ konturu $|z| = R \cap \mathrm{Re}\,z < 0$ yarımçevrədir.

**4.** $f(z)$ funksiyası üçün Jordan lemmasının şərtləri $\mathrm{Im}\,z \ge y_0$ $(\mathrm{Re}\,z \ge x_0, \mathrm{Im}\,z \le y_0, \mathrm{Re}\,z \le x_0)$ olduqda ödənir, burada $y_0(x_0)$ – həm müsbət, həm mənfi ola bilən qeyd olunmuş ədəddir, inteqral isə $|z-iy_0| = R \cap \mathrm{Im}\,z > 0$ $(|z-x_0| = R \cap \mathrm{Im}\,z > 0;\ |z-iy_0| = R \cap \mathrm{Im}\,z < 0,$

$|z-x_0|=R\cap \operatorname{Im} z<0)$ yarımçevrələrinin qövsü üzrə götürülür. İsbat analojidir, lakin inteqralı qiymətləndirərkən $\xi=\operatorname{Re}^{i\varphi}+iy_0(\xi=\operatorname{Re}^{i\varphi}+x_0)$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

$(\alpha>0)$ olduqda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'}e^{-\alpha\xi}f(\xi)d\xi=0$, burada $C_R'$ konturu $|z|=R\cap \operatorname{Re} z>0$ yarımçevrədir.

**5.** $f(z)$ funksiyası üçün şərtlər yüngülləşdirildikdə də Jordan lemması doğru qalır. Tutaq ki, $f(z)$ funksiyası $\operatorname{Im} z>y_0$ və $|z|>R_0$ olduqda $\arg(z-iy_1)$-ə nəzərən $|z|\to\infty$ olduqda sıfra $-\varphi_0\le\arg(z-iy_1)\le\varphi_1$, $\pi-\varphi_2\le\arg(z-iy_1)\le\pi+\varphi_0$ sektorlarında müntəzəm yığılır və $\varphi_1\le\arg(z-iy_1)\le\pi-\varphi_2$, $0\le\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\le\dfrac{\pi}{2}$ və $y_1>y_0$ sektorunda müntəzəm məhduddur. Onda $a>0$ olduqda $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R'}e^{ia\xi}f(\xi)d\xi=0$, burada $C_R'$ konturu $|z-iy_1|=R\cap \operatorname{Im} z>y_0$ yarımçevrədir.

***Teorem 2.*** *Tutaq ki,* $f(x)$ *funksiyası* $-\infty<x<\infty$ *olduqda verilmiş,* $\operatorname{Im} z\ge 0$ *çoxluğunda sonlu sayda* $z_n$ *izolə olunmuş məxsusi nöqtələri çıxmaq şərti ilə hər yerdə* $f(z)$ *analitik davamı olan, həqiqi oxda məxsusi nöqtələri olmayan və Jordan lemmasının şərtlərini ödəyən funksiyadır. Onda aşağıdakı inteqral var:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iax}f(x)dx=2\pi i\sum_{n=1}^{N}res[e^{iaz}f(z),z_n],$$

*burada* $z_n$*-lər* $\operatorname{Im} z\ge 0$ *yarımmüstəvisində izolə olunmuş məxsusi nöqtələrdir.*

*İsbatı.* ▲ $R>R_0$ olduqda $\{-R<x<R\}\cup C_R'\{|z|=R\cap \operatorname{Im} z>0\}$ konturunu götürək. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə əsasən yaza bilərik:

$$\int\limits_{-R}^{R}e^{iax}f(x)dx+\int\limits_{C_R'}e^{iaz}f(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{n=1}^{N}res[e^{iaz}f(z),z_n] \qquad (1)$$

Lakin Jordan lemmasına əsasən

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi = 0$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfi $R$ – dən asılı olmadığına görə alırıq:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} res[e^{iaz} f(z), z_n].$$

**Misal 4.83.** İnteqralı hesablayın.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx dx}{x^2+a^2} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \mathrm{Re}\,\pi i res\left[\frac{e^{ikz}}{x^2+a^2}, ia\right] = \mathrm{Re}\,\pi i\left(\frac{e^{-ka}}{2ia}\right) = \frac{\pi e^{-ka}}{2a}$$

burada $z_0$ birtərtibli polyus, $k>0, a>0$.

**Qeyd.** Lemma 1 və lemma 2-də cüzi dəyişikliklər etməklə $f(z)$ funksiyasının sonsuz sayda izolə olunmuş məxsusi nöqtələri olan hal üçün onların doğruluğuna nail olmaq olar.

***Tərif.*** *Əgər $f(z)$ funksiyası bütün kompleks müstəvidə təyin olunmuşsa və müstəvinin sonlu hissəsində polyusdan fərqli məxsusi nöqtələri yoxdursa, onda kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasına meromorf funksiya deyilir.*

**Bəzi mühüm inteqrallar.**

1. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{x} = sign(a)\frac{\pi}{2}$.

2. $I = \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)dx$, $0<a<1$. $I = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} res\left[z^{a-1} f(z), z_k\right]$.

3. $I = \int_0^{1} x^{a-1}(1-x)^{-a} f(x)dx$, $0<a<1$.

$$I = \frac{\pi a_0}{\sin \pi a} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} res\left[z^{a-1}(1-z)^{-a} f(z), z_k\right],\ a_0 = \lim_{z\to 0} f(z).$$

4. $I = \int_0^{\infty} f(x)\ln x dx = \pi i \sum_{k=1}^{N} res\left[f(z)\left(\ln z - i\frac{\pi}{2}\right), z_k\right]$

**Misal 4.84.** İnteqralı $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-7}{z^2(z-1)(z-5i)}dz$ hesablayın.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtələri $z_1=0$, $z_2=1$ və $z_3=5i$ nöqtələridir. $z_3=5i$ nöqtəsi inteqrallama konturuna daxil deyil. $z_1=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur. $z_2=1$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə əsasən alırıq:

$$\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-7}{z^2(z-1)(z-5i)}dz = 2\pi i\left(res[f(z),z_1]+res[f(z),z_2]\right)$$

Polyusda çıxıqların hesablanması düsturundan istifadə etsək alarıq

$$res[f(z),z_1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\left(\frac{(z-7)z^2}{z^2(z-1)(z-5i)}\right)'\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-1)(z-5i)-(z-7)(2z-1-5i)}{(z-1)^2(z-5i)^2}=\frac{7+30i}{25}$$

Sadə polyus üçün

$$res[f(z),z_2]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-7)(z-1)}{z^2(z-1)(z-5i)}=-\frac{6}{1-i}$$

Bunları yuxarıda nəzərə alsaq, alarıq

$$\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z-7}{z^2(z-1)(z-5i)}dz = 2\pi i\left(\frac{7+30i}{25}-\frac{6}{1-i}\right)=\pi\left(\frac{24}{5}-\frac{106}{25}i\right).$$

**Misal 4.85.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}$, $a>1$.

*Həlli.* $z=e^{ix}$ əvəzləməsi aparaq. $x$ dəyişəni 0-dan $2\pi$-yə qədər dəyişdikdə $z$ dəyişəni $|z|=1$ çevrəsi boyunca müsbət istiqamətdə qiymətlər alar.

$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$ və $dx=\frac{dz}{iz}$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(\frac{z^2+1}{2z}+a\right)}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Məxrəcin kökləri $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$, $z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$ sadə polyuslardır. $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ nöqtəsi $|z|=1$ dairəsinin daxilində yerləşir. Onda $resf(z_1)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$ olduğundan yaza bilərik

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=\frac{2}{i}\cdot\frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

**Misal 4.86.** İnteqralı hesablayın:

$$\int_0^{2\pi}tg(\varphi+i)d\varphi$$

*Həlli.* $z=e^{2i\varphi}$ əvəzləməsi aparaq. $\varphi$ dəyişəni 0-dan $2\pi$-yə qədər dəyişdikdə $z$ dəyişəni $|z|=1$ çevrəsi boyunca müsbət istiqamətdə qiymətlər alar.

$2i\varphi=\ln z$, $d\varphi=\frac{1}{2i}\cdot\frac{dz}{z}$. Onda

$$tg(\varphi+i)=\frac{e^{i(\varphi+i)}-e^{-i(\varphi+i)}}{i(e^{i(\varphi+i)}+e^{-i(\varphi+i)})}=\frac{e^{i\varphi}e^{-1}-e^{-i\varphi}e}{i(e^{i\varphi}e^{-1}+e^{-i\varphi}e)}=\frac{\frac{\sqrt{z}}{e}-\frac{e}{\sqrt{z}}}{i\left(\frac{\sqrt{z}}{e}+\frac{e}{\sqrt{z}}\right)}=\frac{z-e^2}{i(z+e^2)}.$$

Bizim halda, $z=0$ və $z=-e^2$ nöqtələri sadə polyuslardır. $z=0$ nöqtəsi inteqrallama konturuna daxildir və $res[f(z),0]=-1$. Onda inteqral

$$\int_0^{2\pi}tg(\varphi+i)d\varphi=\frac{1}{2i^2}\int_{|z|=1}\frac{z-e^2}{z+e^2}\cdot\frac{dz}{z}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i^2}\cdot(-1)=\pi i.$$

**Misal 4.87.** İnteqralı hesablayın: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

*Həlli.* İnteqralaltı funksiyanın yuxarı yarımmüstəviyə analitik davamı olan $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ funksiyası Jordan lemmasının bütün şərtlərini ödəyir. Yuxarı yarımmüstəvidə bu funksiyanın məxsusi nöqtələri $z_k=e^{\frac{i\pi}{4}(2k+1)}$, $k=0,1$. Hər iki nöqtə bir tərtibli polyusdur.

Ona görə də $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2\pi i\sum\limits_{k=0}^{1}res[f(z),z_k]=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

**Misal 4.88.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x dx}{x^2+a^2}$, $\alpha>0, a>0$.

*Həlli.* Qeyd edək ki, Eyler düsturuna görə $\cos\alpha x=\mathrm{Re}\,e^{i\alpha x}$. Onda inteqralı $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x dx}{x^2+a^2}=\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}dx}{x^2+a^2}$ kimi yazmaq olar. İnteqralaltı funksiyanın analitik davamı olan $f(z)=\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}$ funksiyası yuxarı yarımmüstəvidə sadə polyus olan yeganə $z_1=ia$ məxsusi nöqtəsinə malikdir. Onda çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə görə

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x dx}{x^2+a^2}=\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}dx}{x^2+a^2}=2\pi i res[f(z),z_1]=\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}.$$

**Misal 4.89.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}$.

*Həlli.* $i,-i,2$ polyusları inteqrallama konturuna daxildir. Çıxıqları hesablayaq:

$$res[f(z),i]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\frac{1}{2i(2-i)},$$

$$res[f(z),-i]=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=-\frac{1}{2i(2+i)},$$

$res[f(z),2]=\lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z)=\frac{4}{5}$. Onda inteqral

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}=2\pi i\left(\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right)=2\pi i\frac{10+5i-10+5i+40i}{2i(4+1)5}=2\pi i.$$

Bu inteqralı sonsuz uzaqlaşmış nöqtədəki çıxıq vasitəsilə hesablayaq:

$$f(z)=\frac{z^2}{z^3\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{2}{z}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\ldots$$

Onda $res[f(z),z_\infty]=-1$ və deməli, yenə inteqral $2\pi i$-yə bərabərdir. Yəni $\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}=2\pi$.

**Misal 4.90.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_{|z|=2}\frac{z^{20}dz}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3}$.

*Həlli.* Bütün $z_k=\sqrt[4]{1},\sqrt[3]{-0,5}$ məxsusi nöqtələr inteqrallama konturuna daxildir. Bu nöqtələrdə çıxıqların hesablanması kifayət qədər mürəkkəbdir. Ona görə də

$\int\limits_{\partial G}f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}res[f(z),z_k]=-2\pi ires[f(z),z_\infty]$ düsturundan istifadə edək. İnteqralaltı funksiyanı aşağıdakı kimi çevirək:

$$f(z)=\frac{z^{20}}{4z^6\left(1+\frac{1}{2z^3}\right)^2z^{12}\left(1-\frac{1}{z^4}\right)^3}=$$

$$=\frac{z^2}{4}\left(1-\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{4z^6}-\ldots\right)^2\left(1+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}\ldots\right)^3=\frac{z^2}{4}-\frac{1}{4z}+\ldots$$

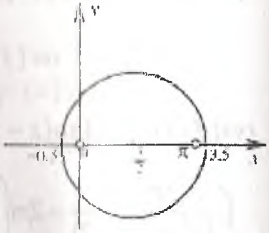
Onda $res[f(z),z_\infty]=\frac{1}{4}$ və inteqral

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^{20}dz}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3}=-2\pi ires[f(z),z_\infty]=-\frac{\pi i}{2}.$$

**Misal 4.91.** İnteqralı hesablayın:

$$\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2}\frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}\cdot(z-\pi)}dz$$

*Həlli.* $f(z)=\frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}\cdot(z-\pi)}$ funksiyasının məxsusi nöqtələri $z=\pi$ və $z_n=2\pi n$, $n\in Z$. Görürük ki, konturun daxilinə $z=\pi$ və $z_0=0$ nöqtələri düşür(şəkil 39).



Şəkil 39.

$z=\pi$ nöqtəsi üçün $\lambda(z)=\dfrac{z^3+\sin 2z}{\sin\dfrac{z}{2}}$, $\mu(z)=\pi z$ işarə etsək, onda

$f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ olar. $\lambda(\pi)=\dfrac{\pi^3+0}{1}=\pi^3\neq 0$, $\mu(\pi)=0$, $\mu'(\pi)=1\neq 0$.

Deməli, $z=\pi$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur. Onda çıxıq

$$resf(\pi)=\frac{\lambda(\pi)}{\mu'(\pi)}=\pi^3.$$

$z_0=0$ nöqtəsi üçün $\lambda(z)=z^3+\sin 2z$, $\mu(z)=\sin\dfrac{z}{2}(z-\pi)$ işarə etsək, onda $\lambda(0)=0$; $\lambda'(z)=3z^2+2\cos 2z$, $\lambda'(0)=2\neq 0$;

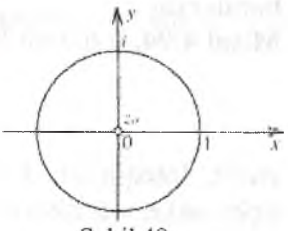
$\mu(0)=0$, $\mu'(z)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{z}{2}(z-\pi)+\sin\dfrac{z}{2}$, $\mu'(0)=-\dfrac{\pi}{2}\neq 0$. Deməli, bu halda $z_0=0$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir. Ona görə də $resf(0)=0$. Koşi teoremindən istifadə edərək tapırıq ki,

$$\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2}\frac{z^3+\sin 2z}{\sin\dfrac{z}{2}\cdot(z-\pi)}dz=2\pi i\cdot\pi^3=2\pi^4 i$$

**Misal 4.92.** İnteqralı hesablayın:

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2e^{\frac{1}{z}}-1}{z}dz$$

*Həlli.* $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z}}-1}{z}$ funksiyasının yeganə məxsusi nöqtəsi $z_0=0$ nöqtəsidir və o da konturun daxilinə düşür(şək. 40). İnteqralaltı funksiya $z$-in dərəcələrinə görə Loran sırasına ayrılır.



Şəkil 40.

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\ldots\right)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\frac{1}{24z^2}+\ldots-1\right)=$$

$$= z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{24z^3} + \ldots - \frac{1}{z} =$$

$$= z + 1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{24z^3} + \ldots$$

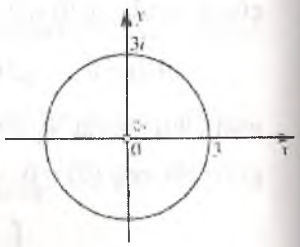
Görürük ki, $resf(0) = c_{-1} = -\frac{1}{2}$. Onda

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}} - 1}{z} dz = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i = -\pi i$$

**Misal 4.93.** İnteqralı hesablayın:

$$\int_{|z|=3} \frac{3z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz$$

*Həlli.* Burada yeganə məxsusi nöqtə $z_0 = 0$ nöqtəsi var ki, o da konturun daxilinə düşür(şək. 41). İnteqralaltı funksiya üçün Loran sırası sonludur.



Şəkil 41

$f(z) = \frac{2}{2z^2} + \frac{3}{2z^3} - \frac{1}{z^5}$. Asanlıqla görünür ki, $c_{-1} = 0$, deməli, $resf(0) = 0$. Bu isə deməkdir ki, inteqral da sıfra bərabərdir.

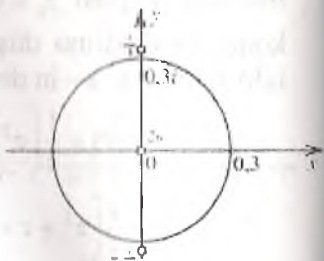
**Misal 4.94.** İnteqralı hesablayın:

$$\int_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 sh3\pi z} dz$$

*Həlli.* İnteqralaltı funksiyanın məxsusi nöqtələrini tapaq. Bunun üçün $sh3\pi z = 0$ tənliyini həll edək.

$3\pi z = Arsh0 = Ln(0 + \sqrt{1}) = Ln(\pm 1) =$

$$= \ln 1 + \begin{Bmatrix} \pi \\ 0 \end{Bmatrix} i + 2\pi k i = \pi n i$$



Şəkil 42.

Deməli, məxsusi nöqtələr $z_n = \frac{ni}{3}$, $n \in Z$, eləcə də $n = 0$ olduqda alınan $z_0 = 0$ nöqtəsi. $\frac{1}{3} > 0,3$ olduğundan ancaq

$z_0 = 0$ nöqtəsi konturun daxilinə düşür(şək. 42).

$f(z)$ funksiyasını $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ kəsri şəklində göstərək.

Burada $\lambda(z) = e^{3z} - 1 - \sin 3z$, $\mu(z) = z^2 sh3\pi z$. Sıraya ayırsaq, alarıq:

$$\lambda(z) = 1 + 3z + \frac{9z^2}{2} + \frac{9z^3}{2} + \ldots - 1 - 3z + \frac{9z^3}{2} + \ldots = \frac{9z^2}{2} + 9z^3 + \ldots$$

Deməli, $z_0 = 0$ nöqtəsi $\lambda(z) = e^{3z} - 1 - \sin 3z$ üçün 2 tərtibli sıfırdır.

$$\mu(z) = z^2\left(3\pi z + \frac{9\pi^3}{2}z^2 + \ldots\right) = 3\pi z^3 + \frac{9\pi^3}{2}z^5 + \ldots$$

Deməli, $z_0 = 0$ nöqtəsi $\mu(z) = z^2 sh3\pi z$ üçün 3 tərtibli sıfırdır. Ona görə də $z_0 = 0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün birtərtibli polyusdur. Onda

$$res f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z sh3\pi z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{3\pi z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{3e^{3z} - 3\cos 3z}{6\pi z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{9e^{3z} + 9\sin 3z}{6\pi} = \frac{9}{6\pi} = \frac{3}{2\pi}$$

Burada $z \to 0$ olduqda $sh3\pi z \sim 3\pi z$ ekvivalentliyindən və Lopital qaydasından istifadə etdik. Beləliklə, inteqral üçün alırıq:

$$\int_{|z|=0.3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 sh3\pi z}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{3}{2\pi} = 3i.$$

**Misal 4.95.** İnteqralı hesablayın:

$$\int_{|z+2i|=3} \left( \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} + \frac{6ch\dfrac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)} \right) dz$$

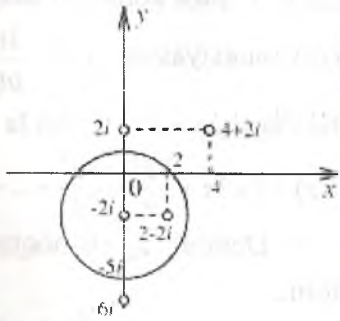
*Həlli.* Əvvəlcə məxsusi nöqtələri tapırıq.

$$\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}} + 1} = 0 \Rightarrow \frac{\pi z}{2} = Ln(-1)$$

Deməli, $\dfrac{\pi z}{2} = \pi i + 2\pi n i$.

Beləliklə, $z_n = (2+4n)i$, $n \in Z$. $n=-1$ olduqda alınan $z_0 = -2i$ nöqtəsi kontura daxildir.

$z_1 = 2-2i$ və $z_2 = 4+2i$ nöqtələri də məxsusi nöqtələrdir. Kontura $z_1 = 2-2i$ nöqtəsi daxildir(şək. 43).



Şəkil 43.

$f_1(z) = \dfrac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}$ və

$f_2(z) = \dfrac{6ch\dfrac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}$ funksiyalarının məxsusi nöqtələri müxtəlif olduqlarından inteqralı iki inteqralın cəmi kimi hesablamaq olar.

$\varphi(z) = \dfrac{1}{f_1(z)} = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{\pi}$ işarə edək. Onda $\varphi(-2i) = 0$,

$\varphi'(z) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}}$, $\varphi'(-2i) = \dfrac{1}{2} e^{-\pi i} = -\dfrac{1}{2}$. Deməli, $z_0 = -2i$ nöqtəsi $f_1(z)$ funksiyası üçün bir tərtibli polyusdur. Onda çıxıq aşağıdakı kimi hesablanar.

$$resf(-2i) = \frac{1}{\varphi'(-2i)} = -2 .$$

İndi isə $f_2(z)$ funksiyasına keçək. Onu $f_2(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$ kəsri şəklində göstərək. Burada $\lambda(z) = \dfrac{6ch\dfrac{\pi iz}{2-2i}}{(z-4-2i)}$, $\mu(z) = (z-2+2i)^2$.

Görürük ki, $\lambda(2-2i) = \dfrac{6ch\pi i}{2-2i-4-2i} = \dfrac{6\cos(-\pi)}{-2-4i} = \dfrac{3}{1+2i} \neq 0$, $\mu(z) = (z-2+2i)^2$ funksiyası üçün isə $z_1 = 2-2i$ nöqtəsi iki tərtibli sıfırdır. Deməli, $z_1 = 2-2i$ nöqtəsi $f_2(z)$ funksiyası üçün iki tərtibli polyusdur. Polyusların hesablanması düsturundan istifadə edək. Əvvəlcə törəməni hesablayaq.

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-4-2i)}\right)=6\left(\frac{\pi i}{2-2i}\cdot\frac{sh\frac{\pi iz}{2-2i}}{z-4-2i}-\frac{ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-4-2i)^2}\right)$$

Bu ifadə də $z_1=2-2i$ olduğunu nəzərə alsaq

$$resf_2(2-2i)=6\cdot\left(\frac{\pi i}{2-2i}\cdot\frac{sh\pi i}{2-2i-4-2i}-\frac{ch\pi i}{(2-2i-4-2i)^2}\right)=$$

$$=6\cdot\frac{1}{(-2-4i)^2}=\frac{6}{4-16+16i}=\frac{6}{-12+16i}=\frac{3(-6-8i)}{36+64}=-0{,}18-0{,}24i$$

alarıq.

$$\int\limits_{|z+2i|=3}\left(\frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}+\frac{6ch\frac{\pi iz}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz=$$

$$=2\pi i(-2-0{,}18-0{,}24i)=\pi(0{,}48-4{,}36i)$$

$\int\limits_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)dt$, (burada $R$ funksiyası $\cos t$ və $\sin t$ arqumentlərindən asılı olan və inteqrallama sərhədləri daxilində məhdud olan rasional funksiyadır) inteqrallarını hesablamaq üçün aşağıdakı qaydadan istifadə edilir.

$e^{it}=z$ əvəzləməsi aparaq, onda $dt=\frac{dz}{iz}$, $\cos t=\frac{z^2+1}{2z}$, $\sin t=\frac{z^2-1}{2iz}$ və $[0;2\pi]$ inteqrallama parçası $C:|z|=1$ konturuna keçir. İnteqral isə aşağıdakı şəklə düşür:

$$\int_C F(z)dz.$$

Bu inteqralı hesablamaq üçün isə çıxıqlar haqqında Koşi teoremindən istifadə etmək olar. Nəticədə biz həqiqi ədəd almalıyıq, çünki ilkin inqeral həqiqi idi.

Rasional funksiyaların məxsusi nöqtələrinin xarakteri ilə bağlı olan bir xüsusiyyəti qeyd edək. Əgər $f(z)$ ixtisar olunmayan rasional kəsrdirsə, onda onun məxsusi nöqtələri məxrəcin sıfırları-

dır. Bu sıfırlar polyuslardır və onların tərtibi məxrəcin sıfırlarının tərtibi ilə üst-üstə düşür. Məsələn, $f(z)=\dfrac{z^2+3z+6}{(z^2+1)^2z^3}$ funksiyası üçün $z_0=0$ nöqtəsi üç tərtibli, $z_{1,2}=\pm i$ nöqtələri isə iki tərtibli polyuslardır. Çünki $f(z)$ funksiyası ixtisar olunmayan kəsrdir və məxrəc $z^3(z^2+1)^2=z^3(z-i)^2(z+i)^2$ şəklində göstərilə bilər.

**Misal 4.96.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.

*Həlli.* Əvəzetmə aparmaqla inteqralaltı funksiyanı aşağıdakı şəklə gətirək.

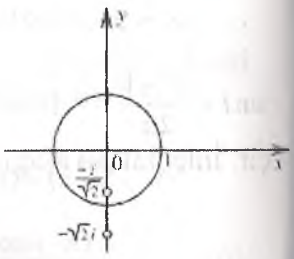
$$\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}=\frac{dz}{iz\left(4\sqrt{2}\dfrac{z^2-1}{2iz}+6\right)}=\frac{dz}{2\sqrt{2}\left(z^2+\dfrac{3i}{\sqrt{2}}z-1\right)}$$

Onda inteqral aşağıdakı şəklə düşər.

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}=\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{2\sqrt{2}\left(z^2+\dfrac{3i}{\sqrt{2}}z-1\right)}$$

İnteqralaltı $f(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\left(z^2+\dfrac{3i}{\sqrt{2}}z-1\right)}$ funksiyası rasional olduğundan onun məxsusi nöqtələri asanlıqla tapılır.

$z^2+\dfrac{3i}{\sqrt{2}}z-1=0$ tənliyini həll edək. Onun kökləri $z_1=-i\sqrt{2}$; $z_2=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ədədləridir. Bu nöqtələr $f(z)$ funksiyası üçün bir tərtibli polyuslardır. Lakin $z_2=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ nöqtəsi $|z|=1$ konturuna daxildir(şək. 44). $f(z)$ funksiyası $f(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}(z+\frac{i}{\sqrt{2}})(z+i\sqrt{2})}$ şəklində göstərilə bildiyindən



Şəkil 44.

$z_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ nöqtəsində çıxıq

$$res f(z_2) = \lim_{z \to -\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)\left(z + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to -\frac{i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}(z + i\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} + i\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2i}$$

olur.

Onda inteqral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

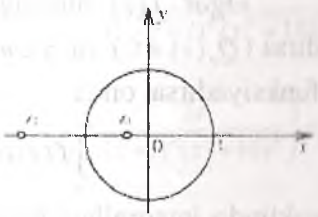
**Misal 4.97.** İnteqralı hesablayın: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2}$.

*Həlli.* Əvəzetmə aparsaq, alarıq

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}\cos t)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{z^2 + 1}{2z}\right)^2} =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \cdot \frac{1}{4z^2}\left(2\sqrt{5}z + \sqrt{2}z^2 + \sqrt{2}\right)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{i\left(z^2 + \sqrt{10}z + 1\right)^2}$$

Məxrəcin kökləri: $z_{1,2} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ədədləridir. Kontura ancaq $z_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ nöqtəsi daxildir(şək. 45). Bu nöqtə ikitərtibli polyusdur.



Şəkil 45.

İnteqralaltı funksiyanı

$$f(z) = \frac{2z}{i(z - z_1)^2(z - z_1)^2}$$

şəklində göstərmək mümkün olduğundan $z_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ nöqtəsindəki çıxıq

$$resf(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{i(z-z_2)^2}\right)=\lim_{z\to z_1}\frac{2}{i}\left(\frac{1}{(z-z_2)^2}-\frac{2z}{(z-z_2)^3}\right)=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{-z_1-z_2}{(z_1-z_2)^3}=\frac{2}{i}\cdot\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3}=\frac{2}{i}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\left(\sqrt{6}\right)^3}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}i}$$

olar. Onda axtarılan inteqral

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}=2\pi i\cdot\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}i}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\pi \text{ olar.}$$

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ şəklində rasional funksiyadır, $P_m(x)$ və $Q_n(x)$ çoxhədliləri uyğun olaraq $m$ və $n$ dərəcəlidirlər.

Əgər $f(x)$ funksiyası bütün həqiqi oxda kəsilməz funksiyadırsa ($Q_n(x)\neq 0$) və $n\geq m+2$, yəni məxrəcin dərəcəsi surətin dərəcəsindən heç olmazsa iki vahid böyükdürsə, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{\substack{z_k\\ \operatorname{Im} z_k>0}}resf(z_k)$$

Sağda yuxarı yarımmüstəvidə yerləşən bütün çıxıqların cəmi durur.

Əgər $f(x)$ funksiyası bütün həqiqi oxda kəsilməz funksiyadırsa ($Q_n(x)\neq 0$) və $n\geq m+1$, yəni $f(x)$ funksiyası düzgün rasional funksiyadırsa, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx \text{ və } \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx$$

şəklində inteqralları hesablamaq üçün aşağıdakı qaydadan istifadə etmək əlverişlidir.

$g(z)=f(z)e^{i\lambda z}$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın yuxarı yarımmüstəvidə yerləşən məxsusi nöqtələrindəki çıxıqlarının cəmini tapırıq. Alınan nəticəni $2\pi i$ - yə vururuq. Sonuncu nəticənin həqiqi hissəsi yuxarıdakı birinci inteqrala, xəyali hissəsi isə ikinci inteqrala bərabər olur. Başqa sözlə, biz eyni zamanda iki inteqral hesablamış oluruq. Formal olaraq bunları belə yazmaq olar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ \mathrm{Im}\, z_k>0}} res(f(z_k)e^{i\lambda z_k})\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i \sum_{\substack{z_k \\ \mathrm{Im}\, z_k>0}} res(f(z_k)e^{i\lambda z_k})\right]$$

**Misal 4.98.** İnteqralı hesablayın: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

*Həlli.* Surətin dərəcəsi sıfra bərabərdir, məxrəcin dərəsi isə 6-ya bərabərdir. $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$ funksiyası isə həqiqi oxda məxsusi nöqtələrə malik deyil. Deməli, inteqralı hesablamaq üçün yuxarıdakı düsturu tətbiq etmək olar. Yuxarı yarımmüstəvidə $f(z)$ funksiyası $z_1=4i$ birtərtibli və $z_2=i$ iki tərtibli polyuslara malikdir. Əvvəlcə $z_1=4i$ nöqtəsində çıxığı tapaq. $f(z)$ funksiyasını $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)(z-4i)}$ şəklində göstərmək olar. Onda

$$resf(4i)=\lim_{z\to 4i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+4i)}=\frac{1}{(-16+1)^2(4i+4i)}=\frac{1}{1800i}.$$

$z_2=i$ nöqtəsi üçün $f(z)$ funksiyasını $f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+16)}$ şəklində göstərmək olar. Onda

$$resf(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+16)}\right)=\lim_{z\to i}\left(\frac{-2}{(z+i)^3(z^2+16)}-\frac{2z}{(z+i)^2(z^2+16)^2}\right)=$$

$$=\frac{-2}{(2i)^3(-1+16)}-\frac{2i}{(2i)^2(-1+16)^2}=\frac{13}{900i}$$

Deməli,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}=2\pi i\left(\frac{1}{1800i}+\frac{13}{900i}\right)=0{,}03\pi \text{ olar.}$$

**Misal 4.99.** İnteqralı hesablayın: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

*Həlli.* $g(z)=\dfrac{ze^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya yuxarı yarımmüstəvidə yeganə bir tərtibli $z_0=i$ polyusuna malikdir.

$$resg(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{2iz}}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\left(\frac{e^{2iz}+2ize^{2iz}}{(z+i)^2}-\frac{2ze^{2iz}}{(z+i)^3}\right)=$$

$$=\frac{e^{-2}-2e^{-2}}{(2i)^2}+\frac{2ie^{-2}}{(2i)^3}=\frac{1}{2e^2}$$

Onda $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Re}\left(2\pi i\cdot\frac{1}{2e^2}\right)=0$.

Qeyd edək ki, $f(x)=\dfrac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}$ funksiyasının tək funksiya olduğunu nəzərə alsaydıq, bu nəticəni alardıq. Lakin biz eyni zamanda aşağıdakı inteqralı da hesabladıq.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx=\mathrm{Im}\left(\pi e^{-2}i\right)=\frac{\pi}{e^2}.$$

**Misal 4.100.** İnteqralı hesablayın: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

*Həlli.* $g(z)=\dfrac{(z^2+z)e^{iz}}{z^4+13z^2+36}=\dfrac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya yuxarı yarımmüstəvidə iki bir tərtibli $z_1=2i$ və $z_2=3i$ polyuslara malikdir. Çıxıqları tapırıq:

$$resg(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z+2i)(z^2+9)}=\frac{(-4+2i)e^{-2}}{4i(-4+9)}=\frac{(-2+i)e^{-2}}{10i}$$

$$resg(3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+z)e^{iz}}{(z^2+4)(z+3i)}=\frac{(-9+3i)e^{-3}}{(-9+4)\cdot 6i}=\frac{(3-i)e^{-3}}{10i}$$

Onda

$$2\pi i(resg(2i)+resg(3i))=2\pi i\left(\frac{(-2+i)e^{-2}}{10i}+\frac{(3-i)e^{-3}}{10i}\right)=$$

$$=\left(\frac{3e^{-3}}{5}-\frac{2e^{-2}}{5}\right)\pi+\frac{\pi}{5}(e^{-2}-e^{-3})i$$

olar. İnteqralın qiyməti isə

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{3e^{-3}}{5}-\frac{2e^{-2}}{5}\right)\pi+\frac{\pi}{5}(e^{-2}-e^{-3})i\right] = \frac{\pi(e-1)}{5e^3}.$$

**Misal 4.101.** İnteqralı hesablayın: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $a>1$.

*Həlli.* $e^{i\theta}=z$ əvəzləməsi edək. Onda $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{z^2+1}{2z}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx$, $dx = \frac{dz}{iz}$. Deməli,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Məxrəcin kökləri $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$, $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$-bir tərtibli polyuslardır, $|z_1|<1$ və $z_1$ nöqtəsi $|z_1|<1$ dairəsinin daxilində yerləşir. Onda $res[f(z),z_1] = \frac{1}{z-z_2}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$.

İnteqral isə

$\frac{2}{i}\cdot\frac{2\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. Cavab: $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

## §18. Loqarifmik çıxıqlar

### 18.1. Sıfırların və polyusların hesablanması düsturları

Tutaq ki, $f(z)\in C\infty(\overline{G}\setminus z_1,\dots,z_N)$, $z_n$-lər polyusdur və $f(\xi)\big|_\xi \in \partial G \neq 0$. Onda $\forall \xi\in\partial G$-nöqtəsi düzgün nöqtədir və $\exists f(\xi)\big|_\xi \in \partial G$.

***Tərif.*** $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]$ *funksiyası* $f(z)$ *funksiyasının loqarifmik törəməsi adlanır.* $\varphi(z)$ *funksiyasının onun* $z_n$ *məxsusi nöqtələrindəki çıxıqları loqarifmik çıxıqlar adlanır.*

$f(z)$ funksiyasının $z_k^0$ sıfırları və $z_k$ polyusları $\varphi(z)$ funksiyasının məxsusi nöqtələridir. Çıxıqları necə hesablayaq?

a) Tutaq ki, $z_k^0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının $n$ tərtibli sıfırıdır. Onda yaza bilərik: $f(z)=(z-z_k^0)^n f_1(z)$. $f(z_k^0)\neq 0$. Buradan isə alırıq:

$$\varphi(z)=\frac{n}{z-z_k^0}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.\ res[\varphi(z),z_k^0]=n.$$

b) Tutaq ki, $z_k$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyasının $p$ tərtibli polyusudur. Onda yaza bilərik: $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_k)^n}$. $\psi(z_k)\neq 0$. Buradan isə alırıq:

$$\varphi(z)=-\frac{p}{z-z_k}+\frac{\psi_1'(z)}{\psi(z)}.\ res[\varphi(z),z_k]=-p.$$

***Teorem.*** *$f(z)\in C\infty(\overline{G}\setminus z_1,\dots,z_N)$, $z_n-$lər polyusdur və $f(\xi)\big|_\xi\in\partial G\neq 0$. Onda $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G^+}\dfrac{f'(\xi)d\xi}{f(\xi)}=N-P$, burada $N$ $f(z)$ funksiyasının sıfırlarının təkrarlanma dərəcəsi nəzərə alınmaqla tam sayı, $P$ isə $f(z)$ funksiyasının polyuslarının təkrarlanma dərəcəsi nəzərə alınmaqla tam sayıdır.*

*İsbatı.* ▲Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoreminə əsasən

$$\int\limits_{\partial G^+}\varphi(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{m=1}^{M}res[\varphi(z),z_m]=2\pi i\left[\sum_{k=1}^{N}n_k-\sum_{k=1}^{P}p_k\right]=2\pi i(N-P)$$

Xüsusi halda, əgər $f(z)\in C\infty(\overline{G})$, onda $N=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G^+}\dfrac{f'(\xi)d\xi}{f(\xi)}$. ▼

## 18.2. Arqument prinsipi

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G^+}d\ln f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G^+}d\ln|f(\xi)|+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G^+}id\arg f(\xi).$$

$\ln|f(\xi)|$ həqiqi dəyişənli birqiymətli funksiyadır, ona görə onun dəyişməsi (variasiyası) qapalı $\partial G$ konturu boyunca $\xi$ nöqtəsi ilə hərəkət zamanı sıfıra bərabərdir. Deməli, birinci toplanan sıfırdır. İkinci toplanan isə $\arg(f(\xi))-$in $\partial G$ konturu boyunca

$\xi$ nöqtəsi ilə hərəkət zamanı $2\pi$ – yə bölünmüş tam variasiyasıdır. Beləliklə, $N - P = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f(\xi))]_{\partial G}$.

*Həndəsi interpretasiya.* $w$ kompleks müstəvisində $w = f(z)$ funksiyasının qiymətlərini qeyd edək. $f(z) \in C(\partial G)$ olduğundan $z$ kompleks müstəvisində $\partial G$ konturu boyunca $z$ nöqtəsi ilə tam dövr zamanı ona $w$ kompleks müstəvisində uyğun olan nöqtə müəyyən qapalı $C$ konturunu cızacaq. Bu zaman $w = 0$ nöqtəsi həm $C$ konturunun daxilinə, həm də xaricinə düşə bilər. İkinci halda $Var[\arg(w)]_C = 0$. Birinci halda isə $Var[\arg(w)]_C$ ifadəsinin qiyməti $w = 0$ nöqtəsi ətrafında $C$ konturu boyunca $w$ nöqtəsinin etdiyi tam dövrlərin sayına bərabər olacaq. Bu zaman $w$ nöqtəsinin hərəkəti həm müsbət (saat əqrəbinin əksi istiqamətində), həm də mənfi (saat əqrəbinin hərəkəti istiqaməti) istiqamətdə ola bilər.

*Arqument prinsipi.* $G$ oblastında $f(z)$ funksiyasının tam sıfırlarının sayı ilə polyuslarının sayı arasındakı fərq $z$ nöqtəsinin $\partial G$ konturu boyunca müsbət istiqamətdə hərəkəti zamanı $w = f(z)$ nöqtəsinin $w = 0$ nöqtəsi ətrafındakı tam dövrlərin sayı ilə müəyyən olunur.

## 18.3. Ruşe teoremi və cəbrin əsas teoremi

***Ruşe teoremi.*** *Əgər* $f(z)$, $\varphi(z) \in C(\overline{G})$ *və* $|f(z)|_{\partial G} > |\varphi(z)|_{\partial G}$ *olarsa, onda* $N[f+\varphi]_G = N[f]_G$.

*İsbatı.* ▲ $f(z)$ və $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ funksiyaları üçün teorem 1-in bütün şərtləri ödənir. Doğrudan da, $f(z) \in C(\overline{G})$ olmasından alınır ki, $|f(z)|_{\partial G}$ məxsusi nöqtələrə malik deyil və $|f(z)|_{\partial G} > |\varphi(z)|_{\partial G}$ olduğundan $|f(z)|_{\partial G} \neq 0$. $F(z) \in C(\overline{G})$ olmasından alınır ki, $|F(z)|_{\partial G}$ məxsusi nöqtələrə malik deyil və

$$|F(z)|_{\partial G} = |f(z) + \varphi(z)|_{\partial G} \geq |f(z)|_{\partial G} - |\varphi(z)|_{\partial G} > 0.$$

Buradan isə alınır ki, $N[f+\varphi]_G = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f+\varphi)]_{\partial G}$;

$N[f]_G = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f)]_{\partial G}$.

$$N[f+\varphi]_G - N[f]_G = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg(f+\varphi) - \arg(f)\right]_{\partial G} =$$

$$= \{arfa - \arg b = \arg\frac{a}{b},\quad a = |a|e^{i\arg a},\quad b = |a|e^{i\arg b},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} e^{i(\arg a - \arg b)}\} = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\frac{f+\varphi}{f}\right]_{\partial G} = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]_{\partial G}$$

$w = 1 + \dfrac{\varphi}{f}$ funksiyasını daxil edək. $\partial G$ konturu boyunca $z$ nöqtəsi ilə dövr zamanı ona uyğun $w$ nöqtəsi müəyyən qapalı $C$ konturunu cızacaq. $|f(z)|_{\partial G} > |\varphi(z)|_{\partial G}$ olduğundan bu kontur da tamamilə $|w-1| \le \rho < 1$ dairəsinin daxilində yerləşər, başqa sözlə, $w = 0$ nöqtəsi $C$ konturunun xaricində yerləşir. Buradan isə alınır ki, $Var\left[\arg\left(1+\dfrac{\varphi}{f}\right)\right]_{\partial G} = 0$. ▼

***Cəbrin əsas teoremi.*** *$n$ dərəcəli çoxhədlinin kompleks müstəvidə təkrarlanma dərəcəsi nəzərə alınmaqla $n$ sayda sıfırı var.*

*İsbatı.* ▲ $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ çoxhədlisini

$F(z) = f(z) + \varphi(z)$, $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ şəklində göstərək. Aşağıdakı nisbəti düzəldək: $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)} = \dfrac{a_1}{a_0}\dfrac{1}{z} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_0}\dfrac{1}{z^n}$.

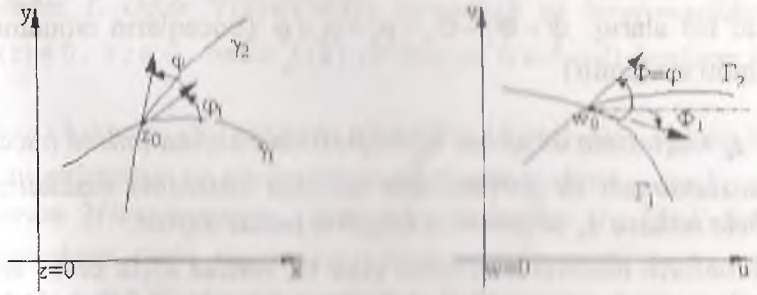
$\forall a_0, a_1, \ldots, a_n$ üçün $\exists R_0$ var ki, $\forall |z| = R > R_0$ üçün $0 < \left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R} < 1$.

Ruşe teoreminə əsasən $N|F|_{|z|=R} = N|f|_{|z|=R}$. Ancaq $f(z) = a_0 z^n$ funksiyasının bütün kompleks müstəvidə yeganə $n$ dərəcəli sıfrı $z = 0$-dır. Onda alarıq ki, $N|F|_{|z|=R} = N|f|_{|z|=R} = n$. ▼

## § 19. Konform inikaslar

### 19.1. $f'(z_0) \neq 0$-m həndəsi mənası. Gərilmələrin sabitliyinin və bucaqların saxlanması xassələri. Nöqtədə konform inikaslar

Tutaq ki, $f(z) \in C\infty(G)$ və $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$. Onda $\exists f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}$, $k > 0$, $\alpha$-müəyyən həqiqi ədəddir. Elə $\Delta z \to 0$ üsulunu seçək ki, $z = z_0 + \Delta z \in \gamma_1 \subset G$, $z_0 \in \gamma_1$, $\gamma_1$-müəyyən hamar əyridir. Onların uyğun nöqtələr $w = w_0 + \Delta w \in \Gamma_1 \subset G$, $w_0 \in \Gamma_1$ ($\Gamma_1$-müəyyən hamar əyridir) olar. $\Delta z$ və $\Delta w$ kompleks ədədləri $\gamma_1$ və $\Gamma_1$ kəsişən əyrilərinin vektorlarıdır. $\arg \Delta z$ və $\arg \Delta w$ isə uyğun vektorların uyğun $z$ və $w$ müstəvilərində absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdikləri bucaqlar olacaqlar. $|\Delta z|$ və $|\Delta w|$ isə bu vektorların modullarıdır. $\Delta z \to 0$ olduqda əyrilərin kəsən vektorları əyrilərin toxunan vektorlarına keçirlər.




Şəkil 46.

$|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$, $k = |f'(z_0)|$ isə $\gamma_1$ əyrisinin seçilməsindən asılı deyil.

**$|f'(z_0)|$-in həndəsi mənası.** $w = f(z) \in C\infty(G)$ və $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in G$ inikası zamanı sonsuz kiçik xətti elementlər oxşar şəkildə çevrilir-

lər. $|f'(z_0)|$ isə oxşarlıq çevirməsinin əmsalıdır. $|f'(z_0)|$ – ifadəsinə $z_0$ nöqtəsində $w=f(z)$ inikası zamanı miqyasın qiyməti kimi baxmaq olar. $|f'(z_0)|>1$ olduqda $z_0$ nöqtəsindən çıxan sonsuz kiçik elementin gərilməsi, $|f'(z_0)|<1$ olduqda isə $z_0$ nöqtəsindən çıxan sonsuz kiçik elementin sıxılması baş verir. $|f'(z_0)|=1$ olduqda miqyas dəyişmir. Bu xassə gərilmələrin *sabitliyi xassəsi* adlanır.

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1 .$$

$\arg f'(z_0)$ – **in həndəsi mənası.** $\Phi_1$ ($\Gamma_1$ əyrisinə çəkilmiş toxunanın $y$ oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq) və $\varphi_1$ ($\gamma_1$ əyrisinə çəkilmiş toxunanın $x$ oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq) bucaqlarının fərqi üçün alırıq: $\Phi_1 = \varphi_1 + \alpha$ (şək. 46). Başqa sözlə, $\arg f'(z_0)$ – törəmənin arqumentinin $z_0$ nöqtəsindəki qiyməti $\forall\gamma$ əyrisinin $z_0$ nöqtəsindəki toxunanın əyrinin obrazının $w_0 = f(z_0)$ nöqtəsindəki toxunanını almaq üçün hansı bucaq altında döndərilməsini müəyyən edir. $\alpha = \arg f'(z_0)$ ifadəsi $\gamma_1$ əyrisinin seçilməsindən asılı olmadığı üçün $\forall\gamma_2$ üçün $z_0 \in \gamma_2$: $\Phi_2 = \varphi_2 + \alpha$. Buradan isə alarıq: $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ (bucaqların istiqaməti və qiyməti saxlanılır)

***Tərif.*** *$z_0$ nöqtəsinin ətrafının $w_0$ nöqtəsinin ətrafına inikası bucaqların saxlanılması və gərilmələrin sabitliyi xassəsinə malikdirsə, onda belə inikasa $z_0$ nöqtəsində konform inikas deyilir.*

Konform inikasın tərifindən çıxır ki, sonsuz kiçik çevrə sonsuz kiçik çevrəyə, sonsuz kiçik üçbucaq sonsuz kiçik üçbucağa keçir.

Əgər $w=f(z)$ funksiyası birqiymətlidirsə, onda $XOY$ müstəvisinin hər bir $z_0$ nöqtəsinə $UOV$ müstəvisinin müəyyən bir $w_0$ nöqtəsi uyğundur. $w_0$ nöqtəsinə $z_0$ nöqtəsinin obrazı, $z_0$ nöqtəsinə isə $w_0$ nöqtəsinin proobrazı deyilir. $z$ müstəvisində əyri $w=f(z)$ funksiyası vasitəsilə $w$ müstəvisində əyriyə inikas olunur. Birinci əyri də proobraz, ikinci əyri isə obraz adlanır. Analoji

olaraq $z$ müstəvisində oblastın $w$ müstəvisində oblasta inikası haqqında danışmaq olar. Əgər bir müstəvinin digər müstəviyə inikası zamanı birinci müstəvi üzərində istənilən nöqtədən çıxan sonsuz kiçik qövslər digər müstəvi üzərində eyni bucaq və gərilmələrə (sıxılmalara) malikdirsə, onda belə inikasa konform inikas deyilir. Başqa sözlə desək, konform inikaslar zamanı sonsuz kiçik hissələrdə oxşarlıq saxlanılır. Analitik funksiyalar vasitəsilə inikas, ola bilər ki, analitik funksiyanın törəmələrinin sıfra bərabər olduqları nöqtələrdən başqa, hər yerdə konform inikasdır.

## 19.2. Konform inikasın əsas tərifi. Oblastın konform inikasının zəruri və kafi şərti

*Əsas tərif.* *$z$ kompleks müstəvisinin $G$ oblastının $w$ kompleks müstəvisinin $D$ oblastına kəsilməz qarşılıqlı birqiymətli inikası $\forall z \in G$ bucaqların saxlanılması və gərilmələrin sabitliyi xassəsinə malikdirsə, belə inikasa $G$ oblastının $D$ oblastına konform inikası deyilir və belə işarə edilir:* $G \xleftrightarrow{K} D$.

Aydındır ki, bu zaman $D$ oblastı da $G$-yə konform inikas olunur.

***Teorem 1.*** *Əgər $f(z) \in C\infty(G)$ birvərəqli və birqiymətlidirsə və $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, onda $f(z)$ funksiyası $G \xleftrightarrow{K} D$ konform inikasdır.*

*İsbatı.* Aşkardır ki, (yuxarıda göstərildiyi kimi) $f(z)$ inikası bucaqların saxlanması və gərilmələrin sabitliyini saxlayır.

***Teorem 2(tərs teorem).*** *Əgər $f(z)$ funksiyası $G \xleftrightarrow{K} D$ konform inikasıdırsa, onda $f(z) \in C\infty(G)$ birvərəqlidir və $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$.*

*İsbatı.* ▲ $G \xleftrightarrow{K} D$ olduğundan $f(z)$ funksiyası kəsilməzdir, birqiymətli və birvərəqlidir. Gərilmələr sabit olduğundan aşağıdakı limit var: $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k > 0$.

Bucaqlar saxlanıldığına görə $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\left(\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \alpha$ – həqiqidir.

Buradan isə alırıq: $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha} \neq 0$. ▼

**Qeyd.** $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$ xassəsi birvərəqliliyin nəticəsidir.

***Teorem 3.*** *$f(z) \in C\infty(G)$ inikasının konform inikas olması üçün zəruri və kafi şərt onun $G$-də birvərəqli və birqiymətli olmasıdır.*

## 19.3. Konform inikasların əsas prinsipləri

### 19.3.1. Sərhədlərin uyğunluğu prinsipi

*Əgər $f(z) \in C\infty(\overline{G})$, $G$-birrabitəli və $f(\xi)$ inikası $\partial G$-ni qapalı $\Gamma = \partial D$ konturuna hərəkət istiqaməti saxlanmaqla qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirirsə, onda $G \xleftrightarrow{K} D$.*

*İsbatı.* ▲İsbat etmək lazımdır ki, $f(z) \in C\infty(\overline{G})$ funksiyası $G$-də birvərəqlidir. Başqa sözlə, a) $\forall w_1 \in D$ üçün $\exists! z_1 \in G$ var ki, $w_1 = f(z_1)$; b) $\forall w_2 \notin D$ üçün heç bir $z_2 \in G$ yoxdur ki, $f(z_2) = w_2$.

İki ixtiyari $w_1 \in D$ və $w_2 \notin D$ nöqtələrini götürək və $G$-də köməkçi $F_1(z) = f(z) - w_1$, $F_2(z) = f(z) - w_2$, $z \in G$ funksiyalarını quraq. Bu funksiyaların sıfırlarını (arqument prinsipinə əsasən) tapaq. Teoremin şərtinə əsasən $\partial G$ konturu boyunca müsbət istiqamətə $\partial D$ konturu boyunca müsbət istiqamət uyğun olduğundan

$$N[F_1(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f - w_1)]_{\partial G} = 1,$$

$$N[F_2(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f - w_2)]_{\partial G} = 0. \blacktriangledown$$

**Qeyd.** Əgər $f(z) \in C\infty(\overline{G} \setminus z_0)$, $z_0$-birtərtibli polyusdursa və $\partial G \leftrightarrow \Gamma$, onda $f(z): G \xleftrightarrow{K} E \setminus D$.

### 19.3.2. Riman teoremi. Konform inikasların əsas qanunu

Tutaq ki, $z$ kompleks müstəvisinin $G$ oblastı və $w$ kompleks müstəvisinin $D$ oblastı verilmişdir. $G$ oblastını $D$ oblastına konform inikas etdirən $f(z) = w$ funksiyasını tapmaq lazımdır.

Komform inikasların əsas qanunu olan Riman teoremini isbatsız verək.

***Riman teoremi.*** *Əgər $G$ oblastı $z$ kompleks müstəvisinin birrabitəli oblastıdırsa və sərhədi heç olmazsa bir nöqtədən ibarətdirsə,*

*onda elə yeganə* $f(z) \in C\infty(G)$ *var ki,* $G \xleftrightarrow{K} |w| < 1$, $f(z_0) = 0$ *və* $\arg f'(z_0) = \alpha$, $z_0 \in G$ *və* $\alpha$ – *verilmiş ədədlərdir.*

**Qeydlər.**

1. $z$ kompleks müstəvisinin $G$ oblastı və $w$ kompleks müstəvisinin $D$ oblastı Riman teoreminin şərtlərini ödəyirlər. Onda $\exists \xi = f(z)$: $G \xleftrightarrow{K} |\xi| < 1$, $f(z_0) = \xi_0$ və $\exists w = \varphi(\xi)$: $|\xi| < 1 \xleftrightarrow{K} D$, $\varphi(\xi_0) = w_0$. Buradan isə alırıq ki, $\exists w = F(z) = \varphi(f(z))$; $G \xleftrightarrow{K} D$; $F(z_0) = w_0$.

2. Oblastın bir rabitəli oblast olması şərti vacib şərtdir.

## 19.4. Konform inikaslarda istifadə olunan əsas funksiyalar

**Xətti funksiya.** $w = az + b$ xətti funksiyası vasitəsilə yerinə yetirilən inikas bütün kompleks müstəvidə konform inikasdır ($a$ ($a \neq 0$) və $b$ sabit kompleks ədədlərdir). Bu inikas düz xətti düz xəttə (düz xətlər arasında bucaq saxlanılır) və çevrəni çevrəyə inikas etdirir.

**Tam funksiya.** $w = f(z) = z^n$, bir vərəqlilik oblastı $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}$.

$w = z^n$ qüvvət funksiyasının köməyi ilə $z$ müstəvisində təpəsi koordinat başdanğıcında olan bucaq $w$ müstəvisində təpəsi koordinat başdanğıcında olan $n$ dəfə böyük bucağa keçir. Əgər bucaq $2\pi$-dən böyük deyilsə, inikas qarşılıqlı birqiymətli olur. Məsələn, $w = z^2$ inikası $z$ müstəvisinin yuxarı yarımmüstəvisini $w$ müstəvisində həqiqi ox boyunca kəsiklə inikas etdirir.

**Üstlü funksiya.** $w = f(z) = e^z$, birvərəqlilik oblastı $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

$w = e^z$, $z = x + iy$ üstlü funksiyası üçün Eyler düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$w = e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Buradan $r = e^x$, $\varphi = y$ alınır. $x = const$ xətləri $r = const$ çevrələrinə ($y$ və $\varphi$ ixtiyaridirlər), $y = const$ xətləri $\varphi = const$ şüalarına ($x$ və $r$ ixtiyaridirlər) keçir. $w = e^z$ inikası zamanı qarşılıqlı birqiymətliliyi təmin etmək üçün zəruriri və kafi şərt:

inikas etdirələn oblast $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in N$ şərtlərini ödəyən müxtəlif $z_1$ və $z_2$ nöqtələrinə malik olmasın. Bu şərti eni $2\pi$-dən çox olmayan istənilən üfiqi zolaq ödəyir. Məsələn, $2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi$. $z$ müstəvisinin $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ zolağı $w = e^z$ funksiyası vasitəsilə $w$ müstəvisinin yuxarı yarımmüstəvisinə, $0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi$ zolağı isə $w$ müstəvisinin həqiqi oxun müsbət hissəsinə kəsiklə inikas olunur. $y = 0$ və $y = 2\pi$ düz xətləri $\varphi = 0$ və $\varphi = 2\pi$ şüalarına, başqa sözlə hər ikisi müsbət həqiqi oxa inikas olunur, ona görə də kəsik lazımdır.

$-\infty < \operatorname{Re} z < 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ yarımzolaqları vahid yarım dairəyə $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, $0 < \operatorname{Re} z < \infty$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ yarımzolaqları isə vahid radiuslu yarımdairəsi atılmış $\operatorname{Im} w > 0$ yarımmüstəviyə inikas olunur.

**Loqarifmik funksiya.** Loqarifmik funksiya üstlü funksiyanın tərs funksiyasıdır, sonsuz qiymətlidir, onun bütün qiymətləri

$$w = Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Əlavə olaraq qəbul edək ki, $z = 0$ və $z = \infty$ olduqda uyğun olaraq $w = \infty$ və $w = \infty$ qiymətlərini alır.

Qeyd olunmuş verilmiş $k$ – lara uyğun olan bütün $w$ – ləri $w_k$ ilə işarə edək. Onda $w = Lnz$ çoxqiymətli funksiyanın budaqları adlanan funksiyalar çoxluğunu alarıq. Loqarifmin sonsuz qiymətliliyi onun xəyali hissəsi olan $Argz$ – in sonsuz qiymətli olması ilə bağlıdır. Loqarifmik funksiyanın birqiymətli budağı onun baş qiyməti $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ funksiyasıdır. Bu funksiyanın həqiqi və xəyali hissələri Koşi-Riman şərtlərini ödəyir. Bu o deməkdir ki, loqarifmik funksiyanın baş qiyməti müəyyən $G$ oblastında təyin olunmuş kompleks dəyişənli diferensiallanan funksiyadır. Onun törəməsi sıfra çevrilmir. Deməli, $w = \ln z$ funksiyası müəyyən $G$ oblastını $w$ müstəvisinin müəyyən oblastına konform inikas etdirir.

**Kəsr-xətti funksiya.** $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ kəsr-xətti inikası bütün kompleks müstəvidə konform inikasdır ($a, b, c, d$ $(c \neq 0)$ sabit kompleks ədədlərdir). Bu inikas çevrəni ixtiyari çevrəyə inikas etdirir (düz xətlər şərti olaraq radiusları sonsuz böyük olan çevrələr hesab

olunurlar). İnikas etdirilən çevrənin daxili oblastı ya obrazın daxili oblastına, ya da obrazın xarici oblastına keçir.

Bunu bir qədər ətraflı aşağıda verək.

$w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \lambda \dfrac{z+\alpha}{z+\beta}$ (3 parametr, $\alpha \neq \beta$).

$z = \lambda' \dfrac{w+\alpha'}{w+\beta'}$; $z \overset{\kappa}{\longleftrightarrow} w$; $\forall z$ üçün $f'(z) \neq 0$.

1. *Həndəsi mənası.* $f(z) = \lambda\left[1 + \dfrac{\alpha-\beta}{z+\beta}\right]$-dönmə və gərilmə, həqiqi oxun inikası, inversiya.

2. $z$ kompleks müstəvisinin üç nöqtəsi ilə $w$ kompleks müstəvisinin üç nöqtəsi arasında $z_1 \leftrightarrow w_1$, $z_2 \leftrightarrow w_2$, $z_2 \leftrightarrow w_2$ uyğunluğunun verilməsi ilə kəsr-xətti funksiya birqiymətli təyin olunur, yəni $\lambda, \alpha, \beta$ parametrləri birqiymətli şəkildə 6 verilmiş kompleks ədədlə ifadə olunur.

*İsbatı.* ▲ $w_1 = \lambda \dfrac{z_1+\alpha}{z_1+\beta}$; $w_2 = \lambda \dfrac{z_2+\alpha}{z_2+\beta}$; $w_3 = \lambda \dfrac{z_3+\alpha}{z_3+\beta}$ verilmişsə, onda

$$w_1 - w_2 = \lambda \frac{(z_1-z_2)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_2+\beta)};\quad w_1 - w_3 = \lambda \frac{(z_1-z_3)(\alpha-\beta)}{(z_1+\beta)(z_3+\beta)};$$

$$\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{(z_1-z_2)(z_3+\beta)}{(z_1-z_3)(z_2+\beta)}.\quad \frac{w-w_2}{w-w_3} = \frac{(z-z_2)(z_3+\beta)}{(z-z_3)(z_2+\beta)};$$

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

Bu ifadədən isə $\lambda, \alpha, \beta$ parametrlərindən birqiymətli asılı olan $w = f(z)$ alırıq. ▼

3. *kəsr-xətti funksiyanın xassələri.*

a) dairəvilik: $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$;

$z = x+iy = \dfrac{1}{\zeta} = \dfrac{1}{\xi+i\eta} = \dfrac{\xi-i\eta}{\xi^2+\eta^2}$ olduğunu nəzərə alsaq, $A + B\xi - C\eta + D(\xi^2+\eta^2) = 0$ alarıq. Çevrə müstəvi üzərində üç nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur. Deməli, $z_i \leftrightarrow w_i$, $i = 1,2,3$ verməklə və hərəkət istiqamətini saxlamaqla birqiymətli

olaraq $G \xleftrightarrow{K} D$ konform inikas etdirən kəsr-xətti funksiyasını müəyyən etmək olar.

**Misal 5.102.** $z=1 \leftrightarrow w=0$; $z=i \leftrightarrow w=1$; $z=-1 \leftrightarrow w=\infty$ şərtlərini ödəyən $|z|<1 \xleftrightarrow{K} \operatorname{Im} z>0$ konform inikasını tapın.

*Həlli.* $w=\lambda\dfrac{z-1}{z+1}$ götürək. $1=\lambda\dfrac{i-1}{i+1}$. Buradan alarıq:

$$\lambda=\frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=-\frac{(i+1)^2}{2}=\frac{-(1+2i-1)}{2}=-i.$$

Deməli, $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$.

b) nöqtələrin qoşmalığının saxlanması.

**Misal 5.103.** $z_0 \leftrightarrow w_0=0$ şərtlərini ödəyən $\operatorname{Im} z>0 \xleftrightarrow{K} |w|<1$ konform inikası $w=\lambda\dfrac{z-z_0}{z-z_0^*}$ şəklindədir.

**Jukovski funksiyası.**

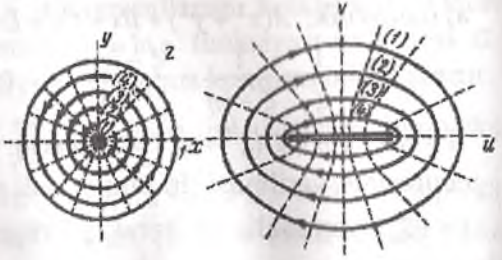
***Tərif.*** $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ *funksiyasına Jukovski funksiyası deyilir.*

$w=f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ funksiyası $0<|z|<\infty$ halqasında birqiymətli analitik funksiyadır. Bir tərtibli iki polyusu $z=0$ və $z=\infty$ var.

Onun $w'=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z^2}\right)$ törəməsi $z$ müstəvisinin $z=0,\pm 1$ nöqtələrindən başqa hər yerdə sıfırdan fərqlidir. Ona görə də bu inikas $z$ müstəvisində qeyd olunan üç nöqtədən başqa hər yerdə konform inikasdır.

İnikasın birvərəqlilik şərtini müəyyən edək. Tutaq ki, $z_1 \neq z_2$ lakin $w_1=w_2$, başqa sözlə $\dfrac{1}{2}\left(z_1+\dfrac{1}{z_1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z_2+\dfrac{1}{z_2}\right)$. Bu bərabərliyi belə də yazmaq olar.

$\left(z_1-z_2\right)\left(1-\dfrac{1}{z_1 z_2}\right)=0$. Bura-



Şəkil 47.

dan $z_1 z_2 = 1$ tapırıq. Deməli, inikas istənilən iki nöqtəsi $z_1 z_2 = 1$ şərti ilə bağlı olmayan oblastda birvərəqli olar. Xüsusi halda, istənilən $|z| < 1$ dairəsi və ya $|z| > 1$ çoxluğu bu şərti ödəyir. Baxılan inikası daha yaxşı təsəvvür etmək üçün aşağıdakı çevirmələrdən istifadə edək.

$z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$

Bunları Jukovski funksiyasında nəzərə alsaq, aşağıdakıları alarıq.

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Bu iki $|z| < 1$ və $|z| > 1$ oblastlarını götürək. $|z| < 1$ oblastında $|z| = r < 1$ çevrəsini götürək. Parametrik yazılışdan $\varphi$ bucağını yox edək. Alarıq ki, bu çevrə inikas zamanı yarımoxları $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ və yarımfokalməsafəsi $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ olan $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ ellipsinə keçir(şək. 47). Beləliklə, inikas zamanı $|z| = r, 0 < r < 1$ çevrəsi fokusları $(\pm 1; 0)$ nöqtəsində, yarımoxları $a$ və $b$ olan ellipsə keçir.

Deməli, birvərəqlilik oblastı $|z| < 1$ və $|z| > 1$

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right); \quad f'(z_{1,2}) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1.$$

*İnikasın həndəsi mənası.*

$$|z| > 1; \quad z = r_0 e^{i\varphi}; \quad w = \frac{1}{2}\left(r_0 e^{i\varphi} + \frac{e^{-i\varphi}}{r_0}\right);$$

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin\varphi;$$

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\right]^2} = 1;$$

$$a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right),\ b=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right).$$

$c^2=a^2-b^2=1\Rightarrow c=\pm 1$. Deməli, $z=r_0e^{i\varphi}$ çevrəsi ellipslər ailəsinə inikas olunur. $r_0\to 1$ olduqda $a\to 1$, $b\to 1$ olur.

$|z|>1\xleftrightarrow{K} w$, $w:[-1;1]$ parçası boyunca kəsikdir(şək. 48).

Şüa $z=re^{i\varphi}$; $1<r<\infty$, $\varphi=\varphi_0$.

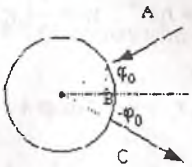
$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi$; $v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$. Buradan alarıq:

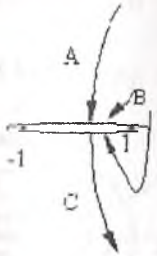
$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1$ – hiperbola. $c^2=a^2+b^2=1\Rightarrow c=\pm 1$.

$0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ -hiperbolanının sağ qolu, $\frac{\pi}{2}<\varphi_0<\pi$ -hiperbolanının sol qolu. $|z|>1$ halında $z$ müstəvisində polyar koordinat sistemi $w$ müstəvisində kəsiklə elliptik koordinat sisteminə hərəkət istiqaməti saxlanmaqla keçir. $w$ müstəvisində $x=u+\sqrt{u^2-1}$, $u>1$ həqiqi funksiyasının analitik davamı olan $z=w+\sqrt{w^2-1}$ tərs funksiyası təyin olunmuşdur.

Analoji olaraq, $|z|<1$ halında $z$ müstəvisində birvərəqlilik oblastı $w$ müstəvisində $[-1;1]$ boyunca kəsiklə və hərəkət istiqaməti dəyişməklə oblasta keçir. $w$ müstəvisində $x=u-\sqrt{u^2-1}$, $u>1$ həqiqi funksiyasının analitik davamı olan $z=w-\sqrt{w^2-1}$ tərs funksiyası təyin olunmuşdur.

Beləliklə, Jukovski funksiyası tam $z$ müstəvisini $w$ müstəvisində $[-1;1]$ boyunca kəsiklə iki müstəvinin birləşməsindən ibarət iki vərəqli Riman səthinə konform inikas etdirir. İnikasın konformluğu $z_{1,2}=\pm 1$, $f'(z_{1,2})=0; z_{1,2}=\pm 1<w_{1,2}=\pm 1$ nöqtələrində pozulur.




Şəkil 48.

$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ tərs funksiyası (hər iki qolu) kəsyin sonunda iki $w = \pm 1$ budaqlanma nöqtəsinə malikdir.

**Misal 5.104.** $\left|z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ dairəsinin $w = \frac{iz - 2}{z + i}$ inikası zamanı hansı oblasta keçdiyini tapın.

*Həlli.* Çevrənin tənliyini yazaq:

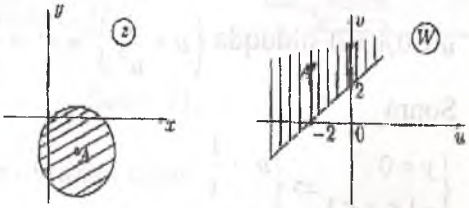
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ və ya $x^2 + y^2 - x + y = 0$.

$x = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right)$, $y = \frac{-i}{2}\left(z - \bar{z}\right)$, $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ düsturlarından istifadə edərək tənliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$2z\bar{z} - (z + \bar{z}) - i(z - \bar{z}) = 0$.

$z$ və $\bar{z}$ dəyişənlərini $w$ vasitəsilə ifadə edək.

$z = -i - \frac{1}{w - i}$; $\bar{z} = i - \frac{1}{\bar{w} - i}$.



Şəkil 49.

Bunları yuxarıdakı tənlikdə nəzərə alsaq, alarıq:

$v = u + 2$. Obrazın mərkəzi $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ nöqtəsi $v = u + 2$ düz xətti üzərində yerləşən $w_A = -1 + 2i$ nöqtəsinə keçir(şək. 49).

**Cavab:** $v \ge u + 2$ yarımmüstəvisi obrazdır.

**Misal 5.105.** $-1 \le x \le 1, y \ge 0$ çoxluğunun $w = \frac{1}{z}$ inikası zamanı obrazını tapın.

*Həlli.* $w = \frac{1}{z}$ ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək.

$u + iv = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

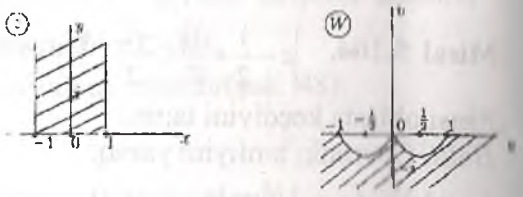
Buradan $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

Proobrazın sərhədləri tənliyindən obrazın sərhədlərini tapaq:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{-1}{1+y^2}<0 \\ v=\dfrac{-y}{1+y^2}\leq 0 \end{cases}$$

İkinci tənliyi birinciyə bölsək alarıq:

$y=\dfrac{v}{u}$. Bunu birinci tənlikdə nəzərə alsaq, alarıq:



Şəkil 50.

$u\left(1+\dfrac{v^2}{u^2}\right)=-1$ və ya $u^2+u+v^2=0$. Nəhayət,

$u<0, v<0$ olduqda $\left(u+\dfrac{1}{u^2}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{4}$ alırıq.

Sonra

$$\begin{cases} y=0 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=0 \end{cases}$$

$v=0$ olduqda $u$ üçün $0<x\leq 1$ olduqda $u\geq 1$ şərtini və $-1\leq x<0$ olduqda $u\leq -1$ şərtini alırıq.

$$\begin{cases} x=1 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{1+y^2}>0 \\ v=\dfrac{-y}{1+y^2}\leq 0 \end{cases}$$

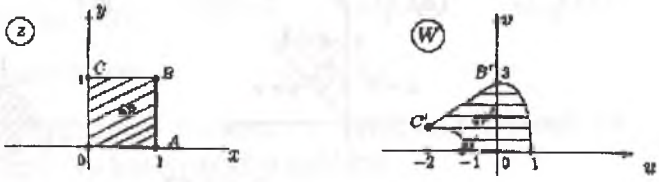
İkinci tənliyi birinciyə bölsək alarıq:

$y=-\dfrac{v}{u}$. Bunu birinci tənlikdə nəzərə alsaq, alarıq:

$v\left(1+\dfrac{v^2}{u^2}\right)=1$ və ya $u^2-u+v^2=0$. Nəhayət,

$u>0, v<0$ olduqda $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$ alırıq. $z=i$ nöqtəsi $w=-i$ nöqtəsinə keçir(şək. 50). **Cavab:** $\left(u+\frac{1}{u^2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$ və $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\frac{1}{4}$ yarımdairələri atılmış $v\le 0$ oblastı.

**Misal 5.106.** $w=z^2+z+1$ funksiyasının $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ kvadratını hansı oblasta inikas etdirdiyini tapın.



Şəkil 51.

*Həlli.* Həqiqi və xəyali hissələri ayıraq

$$u=x^2-y^2+x-1$$
$$v=2xy+y$$

Verilmiş kvadratın sərhədlərinin obrazını tapaq.

$$OA:\begin{cases}y=0\\0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=x^2+x-1\\v=0\end{cases}$$

Bu $-1\le u\le 1$ həqiqi oxunun parçasıdır.

$$AB:\begin{cases}x=1\\0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1-\frac{v^2}{9}\\0\le v\le 3\end{cases}$$

Bu birinci rübdə parabolanın bir hissəsidir. BC və CO parçalarının obrazları da parabola qövsləridir:

$$BC:\ u=\frac{1}{4}\left(v^2-9\right),\ 1\le v\le 3$$

$$CO:\ u=-1-v^2,\ 0\le v\le 1$$

$z=\frac{1}{2}(1+i)$ nöqtəsi $w=i-\frac{1}{2}$ nöqtəsinə keçdiyindən kvadratın daxili oyrixətli dördbucaqlının daxilinə keçir(şək. 51). **Cavab:** kvadratın daxili oyrixətli dördbucaqlının daxilinə keçir.

**Misal 5.107.** $w=\frac{1}{2}z^2-z$ funksiyası vasitəsilə $y=2, x=0, y=x$ düz xətləri arasında qalan üçbucağı inikas etdirin.

*Həlli.* $z = x + iy$ olduğunu nəzərə alaraq

$w = \frac{1}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) - x - iy$ yaza bilərik. Onda $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - x$;

$v = xy - y$. Düz xətlərin nəyə inikas olduqlarını araşdıraq:

$y = 2, 0 \le x \le 2$: $u = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$, $v = 2x - 2$.




Şəkil 52.

Sonuncu ifadədən $-2 \le v \le 2$ olduqda $x = \frac{1}{2}(v + 2)$ olduğunu nəzərə alsaq, onda $u = \frac{1}{8}(v^2 + 4v + 4) - 2 - \frac{v}{2} - 1$ alarıq. Buradan $u = \frac{1}{8}v^2 - \frac{5}{2}$ alırıq. Bu parabola $y = 2$-nin obrazıdır.

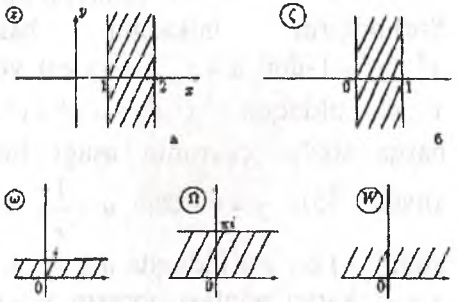
$x = 0, 0 \le y \le 2$: $u = -\frac{1}{2}y^2$, $v = -y$. Görürük ki, $-2 \le v \le 0$ olduqda $u = -\frac{1}{2}v^2$. $x = 0$-ın obrazı da paraboladır.

$y = x, 0 \le x \le 2$: $u = -x$, $v = x^2 - x$ və ya $v = u^2 + u$. Bu isə oxu $Ov$ olan paraboladır. İndi isə proobrazın daxili nöqtələrinin nəyə keçdiyini aydınlaşdıraq. $z = 1 + \frac{3}{2}i$ götürsək, $w = -\frac{13}{8}$ alarıq. Bu nöqtə obrazın daxilindjə yerləşir(Obraz və proobraz 52-ci şəkildə göstərilib).

**Misal 5.108.** $1 < \mathrm{Re}\, z < 2$ vertikal zolağının $\mathrm{Im}\, w > 0$ yuxarı yarımmüstəviyə birvərəqli və komform inikasını tapın.

*Həlli.* $\zeta = z - 1$ düsturu vasitəsilə zolağın sol sərhədini xəyali oxa qədər uzadaq. $\omega = e^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \zeta$ funksiyası isə saat əqrəbinin əksi istiqa-

mətində zolağı düz bucaq qədər döndərəcək. $\Omega = \pi\omega$ inikası isə $0 < \operatorname{Im}\omega < 1$ zolağın enini $\pi$ dəfə artırar. Nəhayət, $w = e^{\Omega}$ inikası isə $0 < \operatorname{Im}\Omega < \pi$ zolağını yuxarı yarımmüstəviyə inikas etdirər(şək. 53).



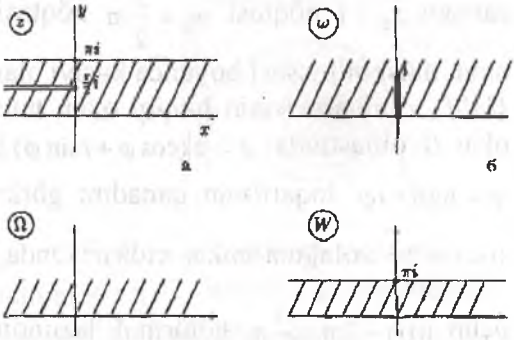
Şəkil 53.

Sonda axtarılan inikas $w = e^{\Omega} = e^{\pi\omega} = e^{\pi\zeta} = e^{\pi(z-1)}$ olar.

**Cavab:** $w = e^{\pi(z-1)}$

**Misal 5.109.** $-\infty < \operatorname{Re} z \le 0$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2}$ oxları boyunca kəsiyi olan $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ zolağının $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ zolağına birvərəqli və komform inikasını tapın və kəsiyi aradan qaldırın.

*Həlli.* $\omega = e^{z}$ funksiyası ilkin zolağı yuxarı $\operatorname{Im}\omega > 0$ yarımmüstəviyə inikas etdirir, bu zaman kəsik xəyali ox boyunca uzunluğu 1-ə bərabər $0 \le |\omega| \le 1$, $\arg\omega = \dfrac{\pi}{2}$ kəsiyə keçər(şək. 54). $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 1}$ funksiyası sonuncu oblastı $\operatorname{Im}\Omega > 0$ yarımmüstəvisinə inikas etdirir. Loqarifmin əsas qanadı yuxarı yarımmüstəvini $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ zolağına inikas etdirir. Beləliklə, axtarılan inikas



Şəkil 54.

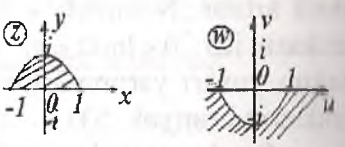
$$w = \ln\Omega = \ln\sqrt{\omega^2 + 1} = \ln\sqrt{e^{2z} + 1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2z} + 1).$$ **Cavab:** $w = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2z} + 1)$.

**Misal 5.110.** $w = \dfrac{1}{z}$ inikası zamanı $|z| = 1$, $0 < \arg z < \pi$ çoxluqların obrazlarını tapın.

*Həlli.* $w = \dfrac{1}{z}$ funksiyasını aşağıdakı kimi çevirək:

$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

Sərhədlərin inikasına baxaq: $x^2 + y^2 = 1$-dən $u = x$, $v = -y < 0$ və ya $v < 0$ olduqda $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$, başqa sözlə, çevrənin aşağı hissəsi(şək. 55). $y = 0$-dan $u = \frac{1}{x}$, $v = 0$ alınır. $-1 \le x < 0$ olduqda $u \le -1$, $0 < x \le 1$ olduqda $u \ge 1$. Proobrazın $z = -i$ xarici nöqtəsi obrazın $w = i$ xarici nöqtəsinə, $z = i$ nöqtəsi obrazın $w = -i$ nöqtəsinə inikas olunur. **Cavab:** $w$ müstəvisinin $u^2 + v^2 = 1, v \le 0$ yarımdairəsi atılmış hissəsi.

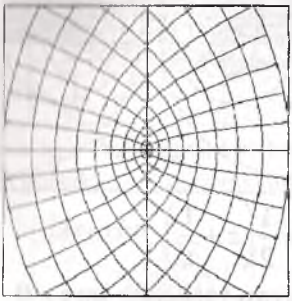


Şəkil 55.

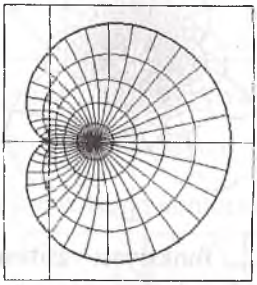
**Misal 5.111.** Loqarifmik funksiyanın birqiymətli qanadının inikası zamanı $z_0 = 1$ nöqtəsi $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$ nöqtəsinə keçməsi halında həqiqi oxun müsbət hissəsi boyunca kəsiyi olan müstəvinin obrazını tapın.

*Həlli.* $z$ müstəvisinin həqiqi oxun müsbət hissəsi boyunca kəsiyi olan $G$ oblastında: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), |z| > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ oblastında $w = \ln|z| + i\varphi$ loqarifmin qanadını götürək. Bu qanad $G$ oblastını $0 < v < 2\pi$ zolağına inikas etdirir. Onda $w(i) = \frac{1}{2}\pi i$. $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$ almaq üçün $w(i) + 2\pi i = \frac{5}{2}\pi i$ götürmək lazımdır. $w = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi)$ qanadı $G$ oblastını $w_0 = \frac{5}{2}\pi i$ nöqtəsini özündə saxlayan $2\pi < v < 4\pi$ zolağına inikas etdirir. **Cavab:** $2\pi < v < 4\pi$.

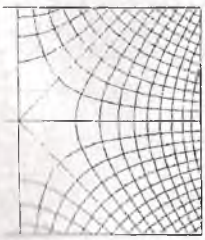
## 19.5. Bəzi elementar funksiyaların konform inikaslarına misallar



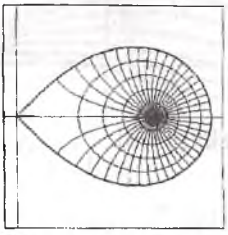
1. $w = z^2$ funksiyasının $\operatorname{Im} z > 0$ yarımmüstəvisinin konform inikası.



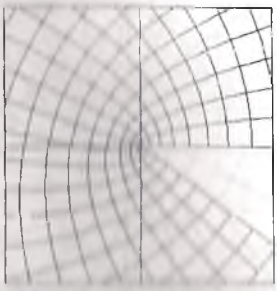
2. $w = z^2$ funksiyası vasitəsilə $|z-1|<1$ dairəsinin konform inikası.



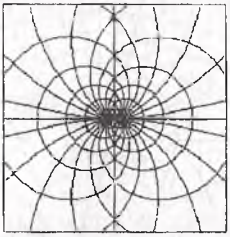
3. $w = \sqrt{z}$ funksiyası vasitəsilə $z$ kompleks müstəvisinin konform inikası.



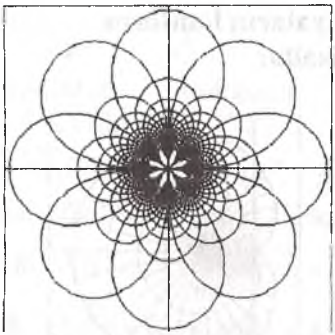
4. $w = \sqrt{z}$ funksiyası vasitəsilə $|z-1|<1$ dairəsinin polyar şəbəkəsinin konform inikası.



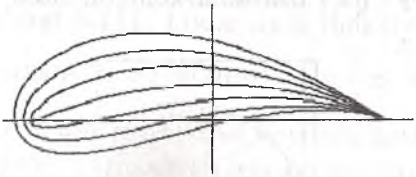
5. $w = z^{1.5}$ funksiyası vasitəsilə $z$ kompleks müstəvisinin dekart şəbəkəsinin konform inikası.



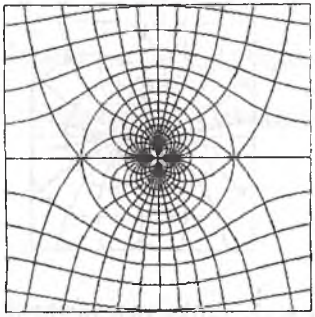
6. $w = \dfrac{1}{z^2}$ funksiyası vasitəsilə dekart şəbəkənin konform inikası.



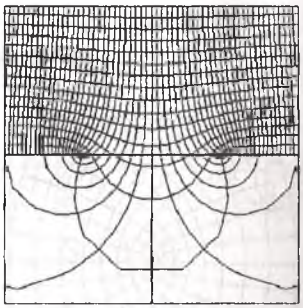
7. $w = \frac{1}{\sqrt{z}}$ funksiyası vasitəsilə dekart şəbəkənin konform inikası.



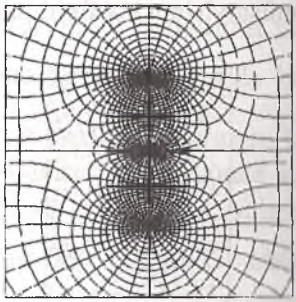
9. Jukovski profili.



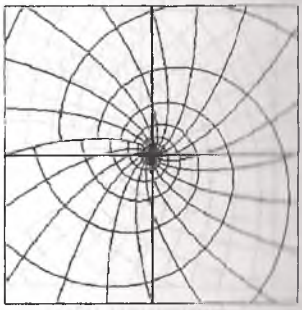
11. Jukovski funksiyasının tərs funksiyası vasitəsilə dekart şəbəkənin konform inikası.



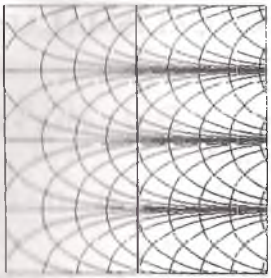
8. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ Jukovski funksiyası vasitəsilə $\operatorname{Im} z > 0$ dekart şəbəkəsinin konform inikası.



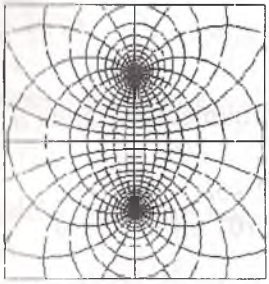
10. Jukovski funksiyasının tərs funksiyası vasitəsilə polyar şəbəkənin konform inikası.



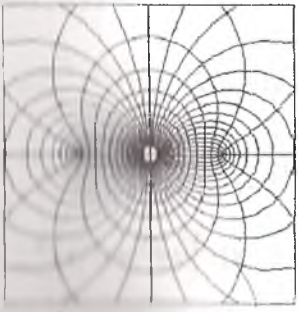
12. $w = e^{\frac{z}{1-0,25i}}$ funksiyası vasitəsilə dekart şəbəkənin konform inikası.



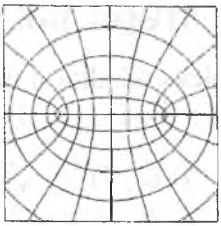
13. $w = \ln z$ funksiyası vasitəsilə dekart şəbəkənin konform inikası.



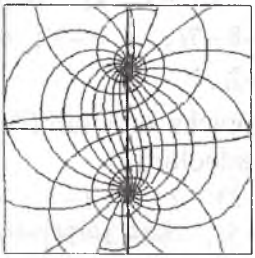
15. $w = tgz$ funksiyası vasitəsilə $-\frac{p}{2} < \mathrm{Re}\, z < \frac{p}{2}$ zolağının dekart şəbəkəsinin konform inikası.



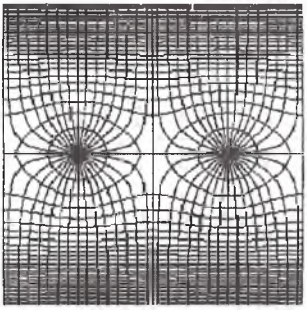
17. $w = \frac{1}{\cos z}$ funksiyası vasitəsilə $0 < \mathrm{Re}\, z < p$ zolağının dekart şəbəkəsinin konform inikası.



14. $w = \cos z$ funksiyası vasitəsilə $-\frac{p}{2} < \mathrm{Re}\, z < \frac{p}{2}$ zolağının dekart şəbəkəsinin konform inikası.



16. $w = tg\frac{z}{1=0,3i}$ funksiyası vasitəsilə $-\frac{p}{2} < \mathrm{Re}\, z < \frac{p}{2}$ zolağının dekart şəbəkəsinin konform inikası.



18. $w = \arccos z$ funksiyası vasitəsilə $\mathrm{Im}\, z > 0$ polyar şəbəkəsinin konform inikası.

## MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN ÇALIŞMALAR

**1.** Kompleks ədədlərin modulunu tapın.

1) $z=-3$; 2) $z=-i$; 3) $z=7$; 4) $z=1-i$; 5) $z=\cos\pi+i\sin\pi$;

6) $z=-5-2\sqrt{6}i$; 7) $z=\sqrt{10}-i$; 8) $z=\left(\dfrac{a+bi}{b+ai}\right)^n$.

**2.** Kompleks ədədlərin arqumentini tapın.

1) $z=i$; 2) $z=1+i$; 3) $z=-1$; 4) $z=8$; 5) $z=-3i$; 6) $z=2-2i$.

**3.** $z_1$ və $z_2$ kompleks ədədlərinin cəmini və hasilini tapın.

1) $z_1=5+4i$; $z_2=-2+3i$; 2) $z_1=0{,}5-3{,}2i$; $z_2=1{,}5-0{,}8i$;

3) $z_1=-8-7i$; $z_2=-3i$; 4) $z_1=5+\sqrt{3}i$; $z_2=5-\sqrt{3}i$; 5) $z_1=3-2i$;

$z_2=5+2i$.

**4.** Kompleks ədədlərin modulunu və arqumentini tapın($a$ və $b$ həqiqi ədədlərdir).

1) $3i$; 2) $-2$; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$;

7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) $bi$, $b\neq 0$; 10) $a+bi$, $b\neq 0$.

**5.** $z_1$ və $z_2$ kompleks ədədləri üçün $z_2-z_1$ və $\dfrac{z_2}{z_1}$ tapın.

1) $z_1=1+i$; $z_2=1-i$; 2) $z_1=1+2i$; $z_2=5$; 3) $z_1=-1+\sqrt{3}i$;

$z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$; 4) $z_1=a-\sqrt{b}i$; $z_2=a+\sqrt{b}i$; 5) $z_1=5+2i$;

$z_2=3-2i$; 6) $z_1=1-i$; $z_2=5+2i$.

**6.** Hesablayın.

1) $\dfrac{1}{i}$; 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3) $\dfrac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$;

5) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}i\right)-\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}i\right)+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}i\right)$; 6) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

7) $2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 8) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$; 9) $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}$;

10) $i+\dfrac{6i+1}{1-7i}$; 11) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$; 12) $(2+i)^5$; 13) $\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^3}{2+i}$.

7. Əməlləri yerinə yetirin.

a) $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$; b) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; v) $\frac{(\sqrt{10}+i)(17+19i)}{19-17i}$;

q) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}+\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\left(\frac{2-i}{4+3i}-\frac{1-2i}{3+4i}\right)$;

e) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}+\frac{3+2i}{i(6-8i)}\cdot(1+i)^2$.

8. Kompleks ədədlərin həqiqi hissələrini tapın.

1) $z=\frac{(1+2i)^3}{i}+i^{19}$; 2) $z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}+\frac{1}{i}$.

9. Kompleks ədədlərin xəyali hissələrini tapın.

1) $z=(2-i)^3(2+11i)$; 2) $z=\frac{2-3i}{1+4i}+i^6$.

10. Kompleks ədədlərin həqiqi və xəyali hissələrini tapın.

$z_1=3-2i$; $z_2=5$; $z_3=-3i$; $z_4=1+i$.

11. Bərabərlikləri isbat edin.

a) $\frac{6-i}{3+4i}=\frac{13+41i}{-25+25i}$; b) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{18-i}{17-19i}$.

12. Kompleks ədədləri triqonometrik formada göstərin.

1) $z=\sqrt{3}-i$; 2) $z=-2$; 3) $z=1$; 4) $z=i^{17}$; 5) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;

6) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 7) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$; 8) $z=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $z=3+4i$; 10) $z=\frac{1}{2i}\left(1+i\sqrt{3}\right)(\cos 60^0+i\sin 60^0)^{-1}$;

11) $z=(i-1)\left(i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{-1}$.

13. Kompleks ədədləri cəbri və triqonometrik formada göstərin.

1) $z=\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$; 2) $z=\frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$; 3) $z=\frac{i}{(1+i)^2}$;

4) $z=\dfrac{-\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12}-i\sin\dfrac{13\pi}{12}}$; 5) $z=\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

**14.** Kompleks ədədləri cəbri formada göstərin.

1) $z=\left(\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$; 2) $z=\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;

3) $z=(\cos 31^0+i\sin 31^0)^{-10}$; 4) $z=\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}i^5}{4}\right)^5$; 5) $z=\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$;

6) $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; 7) $z=(i-\sqrt{3})\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)(1-i)^{-1}$;

8) $z=i^{-5}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(1+i\sqrt{3})^7$.

**15.** Kompleks ədədləri cəbri formada göstərin.

1) $z=e^{2-i}$; 2) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi+12\pi i}$; 3) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

**16.** Kompleks ədədləri üstlü formada göstərin.

1) $z=-\sqrt{12}-2i$; 2) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

**17.** Kompleks ədədləri üstlü və cəbri formada göstərin.

1) $z=5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}-i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$; 2) $z=\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{-3}$;

3) $z=(\sqrt{3}-i)^6$; 4) $z=\dfrac{1}{\left(\cos 12^0+i\sin 12^0\right)^5}$; 5) $z=\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$.

**18.** Aşağıdakı şərtlər daxilində $\sqrt[n]{w}$ ifadəsinin qiymətlərini hesablayın.

1) $w=1;n=3$; 2) $w=-1;n=4$;

3) $w=-4+\sqrt{48}i;n=3$; 4) $w=-1-\sqrt{3}i;n=4$.

**19.** Aşağıdakı kompleks ədədlərin köklərinin bütün qiymətlərini tapın və qurun.

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[4]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;

6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[3]{-4+3i}$.

**20.** Tənlikləri həll edin.

1) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$; 2) $z^2+z=0$; 3) $z^3+8=0$;

4) $z^4-3z^2-4=0$; 5) $|z|-iz=1-2i$; 6) $z^2+3|z|=0$; 7) $z^2+|z|^2=0$;

8) $z^3-1=i$; 9) $z^4-i=1$; 10) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$; 11) $z^4+64=0$.

**21.** Köklərinə əsasən kvadrat tənliyi (Viyet teoremindən istifadə etməklə) tərtib edin.

a) $x_1=1+i\sqrt{3}$, $x_2=1-i\sqrt{3}$; b) $x_1=2+3i$, $x_2=2i$;

**22.** Köklərindən bir verilmiş həqiqi əmsallı kvadrat tənltiyi tərtib edin.

a) $x_1=(3-i)(2i-4)$; b) $x_1=\dfrac{5+i}{i-3}$.

**23.** Tənlikləri həll edin.

a) $x^2-2x+5=0$; b) $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$;

v) $z=z^{n-1}$, $n\neq 2$ – natural ədəddir.

v) $z=\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k$, $\varphi_k=\dfrac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$; $z=0$.

**24.** Tənlikləri həll edin.

a) $(2-3i)z=-1-5i$; b) $z^2-8z-3iz+13+13i=0$;

v) $z^3-z^2+z-1=0$; q) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$;

d) $(3+i)z^2+(1-i)z-6i=0$; e) $|z|=2+i-z$; i) $z^2+\bar{z}=0$.

**25.** $z+z^{-1}=1$ olduğunu bilərək $z^{14}+z^{-14}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

**26.** Kompleks ədədlərin triqonometrik şəklindən istifadə edərək verilmiş kökləri hesablayın.

a) $\sqrt{-9i}$; b) $\sqrt{-8+8\sqrt{3}i}$.

**27.** Sistem tənlikləri həll edin.

a) $\begin{cases}3|z-12|=5|z-8|\\|z-4|=|z-8|\end{cases}$; b) $\begin{cases}z_1+\bar{z}_2=3i\\2z_1-3\bar{z}_2=5\end{cases}$; v) $\begin{cases}|z^2-2i|=4\\|z+1+i|=|z-1-i|\end{cases}$.

**28.** $x$ və $y$ dəyişənlərinin hansı həqiqi qiymətlərində aşağıdakı kompleks ədədlər bərabərdir?

1) $z_1 = x^2 - 7x + 9yi$ və $z_2 = y^2 i + 20i - 12$.

**29.** $x$ və $y$ dəyişənlərinin hansı həqiqi qiymətlərində aşağıdakı kompleks ədədlər qoşmadırlar?

1) $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ və $z_2 = 8y^2 + 20i^7$.

**30.** Verilmiş kompleks köklərə malik həqiqi əmsallı gətirilmiş kvadrat tənlikləri qurun.

1) $2i$; 2) $0$; 3) $1 - 3i$; 4) $4 - i\sqrt{2}$.

**31.** $x$ və $y$ dəyişənlərinin hansı həqiqi qiymətlərində aşağıdakı bərabərliklər doğrudur?

1) $\frac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y$; 2) $\frac{y + ix}{x + iy} = \frac{4 + x}{4i + 1}$.

**32.** $x$ və $y$ dəyişənlərini tənliklərdən tapın.

1) $(\ln x + i \ln y) - \left(\ln y + i \ln \frac{1}{x}\right) = 2 + i$;

2) $(-1 + i)\sin x + i \cos y = \cos x$.

**33.** $x$ və $y$ dəyişənlərinin hansı həqiqi qiymətlərində $z_1$ və $z_2$ qoşma kompleks ədədlər olacaqdır?

1) $z_1 = -3 + ix^2 y$, $z_1 = x^2 + y + 4i$;

2) $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$, $z_1 = 8y^2 + 20i^{11}$.

**34.** Həqiqi ifadələri kompleks şəkildə yazın.

a) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$; b) $x + y + xy = 2$;

**35.** $1$, $-1$, $i$, $\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$ nöqtələrinin sfera üzərində obrazlarını tapın.

**36.** En dairəsi $\beta\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ olan paralelin sfera üzərində obrazı necədir? «Cənub» və «Şimal» polyuslara nə uyğundur?

**37.** Sfera üzərində a) $\arg z = \alpha$ şüasının; b) $|z| = r$ çevrəsinin obrazlarını tapın.

**38.** Qarşılıqlı simmetrik olan nöqtələr cütünün sfera üzərində qarşılıqlı vəziyyəti necədir: 1) $z=0$ nöqtələrinə nəzərən; 2) həqiqi oxa nəzərən; 3) vahid radiuslu çevrəyə nəzərən?

**39.** Hansı şərtlər daxilində iki $z_1$ və $z_2$ nöqtələri sferanın iki diametral əks nöqtələrinin stereoqrafik proyeksiyaları olar?

**40.** Sferanın hansı çevirməsi zamanı $z$ nöqtəsinin obrazı $\frac{1}{z}$ nöqtəsinin obrazına keçir?

**42.** Aşağıdakı bərabərsizliklərlə verilmiş oblastların sfera üzərində obrazlarını tapın.

1) $\operatorname{Im} z > 0$; 2) $\operatorname{Im} z < 0$; 3) $\operatorname{Re} z > 0$; 4) $\operatorname{Re} z < 0$; 5) $|z| < 1$; 6) $|z| > 1$.

**43.** Aşağıdakı şərtləri ödəyən nöqtələr çoxluğunu kompleks müstəvidə göstərin.

1) $|z+1-i| = |z-1+i|$; 2) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; 3) $|z| = z$;

4) $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$; 5) $\begin{cases} |z - i\sqrt{2}| = |z+4| \\ |z| = 2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} |z-1| = |z+1| \\ |z+1| = |z - i\sqrt{3}| \end{cases}$

**44.** Aşağıdakı münasibətləri ödəyən nöqtələr çoxluğunu kompleks müstəvidə göstərin.

1) $|z| \le \left|\frac{z}{2} - 1\right|$; 2) $|z-2|^2 - |z+2|^2 > 3$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;

4) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{3|z|+2} < 2$; 5) $|z - z_0| < R$; 6) $|z - z_0| > R$; 7) $|z - z_0| = R$;

8) $|z-2| + |z+2| = 5$; 9) $\operatorname{Re} z \ge C$; 10) $\operatorname{Im} z < C$; 11) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$;

12) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; 13) $\operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; 14) $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$;

15) $|2z| > |1 + z^2|$.

**45.** Aşağıdakı tənliklərdən hansıları: a) $Ox$ oxunun; b) $Oy$ oxunun tənliyidir.

1) $z = 0$; 2) $z + \bar{z} = 0$; 3) $z = \bar{z}$; 4) $\arg z = 0$; 5) $\operatorname{Im} z = 0$;

6) $|z - i| = |z + i|$; 7) $\arg z = \frac{\pi}{2}$; 8) $\operatorname{Re} z = 0$; 9) $|z - i| = |z + 1|$;

10) $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$; 11) $|2z|>|1+z^2|$.

**46.** Aşağıdakı münasibətləri ödəyən nöqtələr çoxluğunu kompleks müstəvidə göstərin.

1) $|z-2|=|z+4|$; 2) $|z-2+i|>2$; 3) $\left|\dfrac{z+2}{z+4}\right|<1$;

4) $\begin{cases}2\le|z|\le 3\\ \arg z=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$; 5) $\begin{cases}|z|=2\\ |\arg z|<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

**47.** Aşağıdakı tənliklərlə verilmiş xətləri müəyyən edin.

1) $z=1-it$, $0\le t\le 2$; 2) $z=t+it^2$, $-\infty<t<\infty$; 3) $z=t^2+it^4$, $-\infty<t<\infty$; 4) $z=a(\cos t+i\sin t)$, $\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{3\pi}{2}$, $a>0$; 5) $z=t+\dfrac{i}{t}$, $-\infty<t<0$; 6) $z=t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\le t\le 1$; 7) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\le t<0$ (kökün hesabi qiyməti götürülür); 8) $z=a(t+i-ie^{-it})$, $-\infty<t<\infty$, $a>0$; 9) $z=ia+at-ibe^{-it}$, $0\le t\le 2\pi$, $a>0$, $b>0$.

**48.** Aşağıdakı limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i^n}{n}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-in}{1+in}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}+i\dfrac{2n+1}{n}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(ni\sin\dfrac{2}{n}+\left(\dfrac{1+i}{n}\right)^2\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}e^{in\frac{\pi}{n}}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(ni\sin\dfrac{1}{n}+i\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

**49.** Limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{z^3+8i}{z-2i}$; 2) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{(z^2+1)(z^2-3iz+2)}{z^2+z(1-i)-i}$.

**50.** Aşağıdakı kompleks dəyişənli funksiyalarla müəyyən olunan həqiqi dəyişənli funksiyaları tapın.

1) $\operatorname{Im}\overline{(z^2-z)}=2-\operatorname{Im}z$; 2) $2z\bar{z}+(2+i)z+(2-i)\bar{z}=2$;

3) $|z|-3\operatorname{Im}z=6$; 4) $3|z|-\operatorname{Re}z=12$; 5) $|z-2|=|1-2\bar{z}|$;

6) $|z-z_1|=|z-z_2|$; 7) $\operatorname{Re}(z^2-\bar{z})=0$; 8) $|z|=\operatorname{Re}(1+z)$.

**51.** Verilmiş funksiyaların verilmiş nöqtələrdə qiymətlərini hesablayın.

1) $f(z)=x^2+iy^2$: a) $f(1+2i)$; b) $f(2-3i)$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{x-iy}$: a) $f(1+i)$; b) $f(3-2i)$;

3) $f(z)=z^4+z^2+1$, $f\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$;

4) $f(z)=(1+2x+3x^2)(1+3x+2x^2)$, $f\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

**52.** Aşağıdakı hallarda $f(z)=e^z$ funksiyasının qiymətlərini hesablayın.

a) $z=\pi(1-i)$; b) $z=1+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; v) $z=i$; q) $z=1+\dfrac{\pi}{2}$.

**53.** Tapın.

1)Əgər $f(z)=\sqrt[3]{i-z}$ və $f(0)=-i$ olarsa, $f(2i)$ nəyə bərabərdir?

2)Əgər $f(z)=\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ və $f(-2)=-\sqrt{3}$ olarsa, $f(-i)$ nəyə bərabərdir?

3)Əgər $f(z)=e^z$, $z_0=3-2i$ olarsa, $\operatorname{Im} f(z_0)$ nəyə bərabərdir?

4)Əgər $f(z)=\cos z$, $z_0=1-i$ olarsa, $\operatorname{Im} f(z_0)$ nəyə bərabərdir?

5) Əgər $f(z)=3^z$, $z_0=1+i$ olarsa, $\arg f(z_0)$ nəyə bərabərdir?

6)Əgər $f(z)=e^z$, $z_0=2-i$ olarsa, $\arg f(z_0)$ nəyə bərabərdir?

**54.** Verilmiş funksiyaların həqiqi və xəyali hissələrini tapın.

1) $e^{z^2}$; 2) $ze^z$; 3) $z^2\cos z$; 4) $tgz$.

**55.** Verilmiş funksiyaların qiymətlərini tapın.

1) $tg(1+i)$; 2) $\cos(2-i)$; 3) $cth(2+i)$; 4) $th(\ln 3+\dfrac{\pi}{4}i)$.

**56.** Verilmiş funksiyaların həqiqi və xəyali hissələrini tapın.

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $tg(2-i)$;

4) $ctg\left(\dfrac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$; 5) $cth(2+i)$; 6) $th\left(\ln 3+\dfrac{\pi i}{4}\right)$.

**57.** Verilmiş $f(z)$ funksiyası üçün $\operatorname{Re} f(z)$ və $\operatorname{Im} f(z)$ tapın.

1) $f(z)=z^2+i\bar{z}$; 2) $f(z)=\dfrac{1}{z-2i}$.

**58.** Loqarifmlərin qiymətini tapın (Tərifə görə $Lnz=\ln r+i\varphi+2\pi ik$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $\ln z=\ln r+i\varphi$ $(-\pi<\varphi\le\pi)$, $\ln z$ kəmiyyəti $Lnz$ ifadəsinin baş qiyməti adlanır).

1) $Ln4$, $Ln(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $Lni$, $\ln i$;

3) $Ln\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $Ln(2-3i)$, $Ln(-2+3i)$.

5) $Ln(\sqrt{3}+i)$; 6) $\ln(1-i)$; 7) $Ln(ei)$; 8) $Ln(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $\alpha\in R$.

**59.** Verilmiş funksiyaların tərsini tapın.

1) $w=\dfrac{1}{z-2i}$; 2) $w=\dfrac{2z+3}{z-3i}$.

**60.** Verilmiş inikasda $z_0$ nöqtəsinin obrazını tapın.

1) $f(z)=z^2-2iz-8i$, $z_0=2+3i$; 2) $f(z)=\dfrac{z+i}{2z-i}$, $z_0=1$;

3) $f(z)=i\bar{z}+2z^3$, $z_0=1-i$; 4) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{i}+\dfrac{i}{\bar{z}}$, $z_0=2-i$.

**61.** Verilmiş inikasda koordinat oxlarının obrazını tapın.

1) $w=\dfrac{1}{z}$; 2) $w=2iz$; 3) $w=\dfrac{z+2}{z+i}$.

**62.** Verilmiş funksiyanın budaqlanma nöqtəsini müəyyən edin.

1) $w=\sqrt{(z-1)^3(z+i)^2}$, $z\ne\infty$; 2) $w=2iz$; 3) $w=\dfrac{z+2}{z+i}$.

**63.** Verilmiş $f(z)$ funksiyası üçün $|f(z_0)|$ və $\arg f(z_0)$ ifadələrinin qiymətini tapın.

1) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot\sin\dfrac{z}{i}$, $z_0=\dfrac{2}{i}$; 2) $f(z)=e^{\frac{i}{z}}\cdot\sin\dfrac{z}{i}$, $z_0=1$;

3) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+1}$, $z_0=1+i$.

**64.** Verilmiş $f(z)$ funksiyası üçün $|f'(z_0)|$ və $\arg f'(z_0)$ ifadələrinin qiymətini tapın.

1) $f(z)=e^{z^2}$, $z_0=1+i$; 2) $f(z)=e^{2z}$, $z_0=i$.

**65.** Verilmiş $f(z)$ funksiyası üçün $\operatorname{Re} f(z)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

1) $f(z)=i\bar{z}+2z^2$; 2) $f(z)=\frac{\bar{z}}{i}+\frac{i}{\bar{z}}$.

**66.** Verilmiş funksiyaların diferensiallanan olub-olmadığını müəyyən edin.

1) $f(z)=z\operatorname{Re} z$; 2) $f(z)=z\operatorname{Im} z$; 3) $f(z)=\operatorname{Re} z$; 4) $f(z)=\operatorname{Im} z$.

**67.** Aşağıdakı funksiyalar üçün Koşi-Riman şərtlərinin ödəndiyini yoxlayın.

1) $f(z)=z^{-2}$; 2) $f(z)=x^2-2yi$; 3) $z^n$; 4) $e^n$; 5) $\cos z$; 6) $Lnz$.

**68.** Verilmiş funksiyaların törəmələrini tapın.

$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$.

**69.** Verilmiş funksiyaların verilmiş nöqtələrdə törəmələrini tapın.

1) $f(z)=(iz)^3$, $z_0=-1+i$; 2) $f(z)=e^{-z^2}$, $z_0=i$;

3) $f(z)=ze^z$, $z_0=-1+\pi i$; 4) $f(z)=i(1-z^2)-2z$, $z_0=1$.

**70.** $f(z)$ funksiyasının həqiqi hissəsi $u(x,y)$ verilmişdir. Bu funksiyanı tapın.

1) $u(x,y)=x^2-y^2+2x$; 2) $u(x,y)=x^2-y^2-x$;

3) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}$;

4) $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin xshy+x^3-3xy^2+y$.

**71.** $f(z)$ funksiyasının xəyali hissəsi $v(x,y)$ verilmişdir. Bu funksiyanı tapın.

1) $v(x,y)=x+y$; 2) $v(x,y)=\ln(x^2-y^2)+x-2y$;

3) $v(x,y)=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}$.

**72.** Aşağıdakı şərtlərlə verilmiş $f(z)=u+iv$ funksiyasını tapın.

1) $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$;

2) $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$; 3) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-2y$, $f(1)=0$;

4) $v(x,y)=e^x(x\cos y+x\sin y)+x+y$, $f(0)=1$;

5) $u(x,y)=x^2-y^2+xy$, $f(0)=0$;

6) $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$, $f(0)=2$;

7) $u(x,y)=\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(-1;1)=0$;

8) $u(x,y)=-3x^2y+y^3+x$, $v(0;1)=1$.

**73.** Verilmiş $f(z)$ funksiyası üçün Koşi-Riman şərtlərinin ixtiyari nöqtədə ödəndiyini yoxlayın, əgər ödənirsə, onda $f'(z)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

1) $f(z)=3z\cdot e^{2z}$; 2) $f(z)=\cos(z+2i)$.

**74.** Həqiqi və ya xəyali hissəsi verilmiş $f(z)$ funksiyasını tapın.

1) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

2) $\operatorname{Re} f(z)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$;

3) $\operatorname{Im} f(z)=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

4) $\operatorname{Im} f(z)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$;

5) $\operatorname{Re} f(z)=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

6) $\operatorname{Re} f(z)=x\sin x chy-y\cos x shy$.

**75.** Verilmiş funksiya ilə qoşma harmonik funksiyanı tapın.

1) $f(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$;

2) $f(x,y)=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$f(z)=3z\cdot e^{2z}$;

3) $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

4) $f(x,y)=y+\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

**76.** $a,b,c$ sabitlərinin elə qiymətlərini tapın ki, $f(z)$ funksiyası analitik olsun.

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=\cos x(chy+ashy)+i\sin x(chy+bshy)$.

**77.** Verilmiş $f(z)$ funksiyasının analitiklik oblastını tapın.

$f(z)=\left|x^2-y^2\right|+2i|xy|$.

**78.** Aşağıdakı şərtlərlə verilmiş $f(z)=u+iv$ analitik funksiyası varmı?

1) $u=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 2) $v=\ln\left(x^2+y^2\right)-x^2+y^2$; 3) $u=e^{\frac{y}{x}}$.

**79.** Verilmiş modul və ya arqumentə əsasən analitik $f(z)$ funksiyası varmı?

1) $\rho=(x^2+y^2)e^x$; 2) $\rho=e^{r^2\cos 2\varphi}$; 3) $\theta=xy$; 4) $\theta=\varphi+r\sin\varphi$.

**80.** Kompleks dəyişənli funksiyalar üçün Nyuton-Leybnits düsturundan istifadə edərək inteqralları hesablayın.

1) $\int_0^i z\cos z dz$; 2) $\int_0^{1+\pi i} ze^{-z}dz$; 3) $\int_0^{1+i} z^2dz$;

4) $\int_C^i ze^z dz$; 5) $\int_1^{1+i}\frac{dz}{z}$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i}\sin z dz$; 7) $\int_0^{3i} z^2dz$

**81.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1) $\int_C \operatorname{Im} z dz$, $C$ – konturu 0 və $2+i$ nöqtələrini birləşdirən düz xəttdir; 2) $\int_C\frac{dz}{z}$, $C$ – konturu $|z|=1$ çevrəsidir; 3) $\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}$, $C$ – konturu $|z|=1$ çevrəsinin yuxarı yarımhissəsidir, dolanma istiqaməti isə (1;0) nöqtəsindən (-1;0) nöqtəsinə doğrudur ($\sqrt{z}$ ifadəsinin qiymətini ümumi düsturdan $k=0$ üçün götürmək lazımdır); 4) $\int_C\frac{dz}{z}$, $C$ – konturu $1<|z|<2$ oblastının sərhədidir;

5) $\int_C z^3dz$, $C$ – konturu $|z|=1$ çevrəsi ilə $0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$ çoxluğunun kəsişməsidir; 6) $\int_{-i}^{i}|z|dz$, inteqral $-i$ və $i$ nöqtələrini $|z|=1$ çevrəsinin qövsü üzrə birləşdirən əyri üzrə götürülür və $\operatorname{Re} z\ge 0$; 7) $|z|=2$ çevrəsinin $\operatorname{Im} z\le 0$ yarımmüstəvisində yerləşən hissəsi olan və $z_1=-2$ və $z_2=2$ nöqtələrini birləşdirən $C$ – konturu üzrə inteqralları hesablayın: a) $\int_C|z|dz$; b) $\int_C|z|zdz$; v) $\int_C(2x-3iy)dz$;

8) $z_1 = 1$ və $z_2 = i$ nöqtələrini birləşdirən $C$ – düz xətt parçası üzrə inteqralları hesablayın: a) $\bar{z}$; b) $\operatorname{Im} z$; v) $|z|^{-1}$; 9) qapalı konturlar üzrə inteqralları hesablayın: a) $\int_{|z|=1} z\bar{z}dz$; b) $\int_{|z|=2} z \operatorname{Im}(z^2)dz$; v) $\int_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z dz$; 10) $\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z}$ inteqralını $y^2 = x+1$ parabolasının qövsü üzrə hesablayın; 11) $C$ – konturu $z_O = 0$, $z_A = i$ və $z_B = 1+i$ nöqtələrini birləşdirən $OAB$ sınıq xətti olduqda $\int_C (y + xi)dz$ inteqralını hesablayın; 12) $\int_C z^{10} dz$ inteqralını hesablayın, $C$ – konturu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ellipsidir; 13) $\int_{|z-2|=2} \frac{2z^3+1}{(z-1)^4} dz$.

**82.** İnteqralı $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$ hesablayın, əgər a) $3i$ nöqtəsi $C$ konturunun daxilində, $-3i$ nöqtəsi isə onun xaricində yerləşirsə; b) $-3i$ nöqtəsi $C$ konturunun daxilində, $3i$ nöqtəsi isə onun xaricində yerləşirsə.

**83.** Koşi düsturundan istifadə edərək inteqralları hesablayın. $C$ konturu mərkəzi 2 nöqtəsində və radiusu 2-yə bərabər olan çevrədir.

a) $\int_C \frac{z^2}{z-1} dz$; b) $\int_C \frac{z}{z^4-1} dz$.

**84.** İnteqralları verilmiş çevrələr üzrə hesablayın.

a) $\int_{|z|=3} \frac{z^2}{z+i} dz$; b) $\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z} dz$; v) $\int_{|z+2|=2} \frac{z}{z^2-1} dz$;

q) $\int_{|z|=3} \frac{z-7}{z^2(z-1)(z-5i)} dz$; d) $\int_{|z|=2} \frac{z^{20}}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3} dz$;

c) $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz$.

**85.** İnteqralları heablayın.

1) $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^3+16z}dz$, $C$ konturu a) $|z+4i|=2$; b) $|z-1+3i|=2$ olan çoxluqdur;

2) $\int\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz$, $C$ konturu a) $|z+i|=1$; b) $|z+2+i|=2$;

v) $|z-i|=2$; q) $|z+2-i|=3$ olan çoxluqdur;

3) $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z^2 dz$, $C$ konturu $z+\bar{z}=2$ və $|\mathrm{Im}\, z|\le 1$ münasibətləri ilə verilmişdir;

4) $\int\limits_C e^{2z}dz$, $C$ konturu $AOC$ ($A(-1;1)$, $O(0;0)$, $B(1;1)$ nöqtələrini birləşdirən üçbucağın konturudur;

5) $\int\limits_C e^{\bar{z}}dz$, $C$ konturu $A(0;-\pi)$ və $B(\pi;0)$ nöqtələrini birləşdirən $AB$ parçasıdır;

6) $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}\, z dz$, a) $A(0;0)$, $B(2;i)$ $AB$ şüası üzrə; b) $|z|=1$ çevrəsinin yuxarı yarımhissəsi üzrə ($A(1;0)$);

7) $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{2z+i}dz$, $C$ konturu a) mərkəzi koordinat başlanğıcında və tərəfi 0,5 olan kvadratdır; b) $\begin{cases} |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2} \\ |\mathrm{Im}\, z| < 1 \end{cases}$ oblastının sərhədidir.

**86.** $I_1 = \int\limits_C z^2 dz$ və $I_2 = \int\limits_C \bar{z}^2 dz$ inteqrallarını $C$ konturunun aşağıdakı hallarında hesablayın: a) $C$ konturu mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin birinci rübdəki qövsüdür(istiqamət

saat əqrəbinin hərəkətinin əksinədir); b) a) bəndində verilmiş qövsün başlanğıc və son nöqtələrini birləşdirən vətərdir.

**87.** $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2 - z - 2} dz$ inteqralını $C$ konturunun aşağıdakı hallarında hesablayın:

a) $C: |z-(1+i)| = 1$; b) $C: z = 1 + i + e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

v) $C: |z - 3i| = 3{,}1$; q) $C: |z+1| = 1$.

**88.** $I_1 = \int\limits_C x dz$, $I_2 = \int\limits_C y dz$ inteqrallarını aşağıdakı verilmiş yol üzrə hesablayın: 1) $z = 2 + i$ radius-vektoru boyunca; 2) $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ yarımçevrəsi boyunca($z = 1$ başlanğıc nöqtədir); 3) $|z - a| = R$ çevrəsi boyunca.

**89.** $\int\limits_C |z| dz$ inteqralını aşağıdakı verilmiş yol üzrə hesablayın:

1) $z = 2 - i$ radius-vektoru boyunca; 2) $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ yarımçevrəsi boyunca($z = 1$ başlanğıc nöqtədir); 3) $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ yarımçevrəsi boyunca ($z = i$ başlanğıc nöqtədir); 3) $|z| = R$ çevrəsi boyunca.

**90.** $\int\limits_C |z| \bar{z} dz$ inteqralını $|z| = 1$ yarımçevrəsinin yuxarı hissəsi və $-1 \le x \le 1, y = 0$ parçasından ibarət qapalı $C$ konturu üzrə hesablayın:

**91.** $\int\limits_C \frac{z}{\bar{z}} dz$ inteqralını şəkil 56-da verilmiş qapalı yarımhalqadan ibarət $C$ konturu üzrə hesablayın:



Şəkil 56.

**92.** $\int_C (z-a)^n dz$ ($n$ – tam ədəddir) inteqralını aşağıdakı verilmiş yol üzrə hesablayın:

1) $|z-a|=R$, $0 \le \arg(z-a) \le \pi$ yarımçevrəsi boyunca($z=a+R$ başlanğıc nöqtədir); 2) $|z-a|=R$ çevrəsi boyunca; 3) mərkəzi $a$ nöqtəsində və tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan kvadratın perimetri boyunca.

**93.** $\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ inteqralını $C$ konturunun müxtəlif vəziyyətləri üzrə hesablayın. Fərz olunur ki, $C$ konturu 0; 1 və -1 nöqtələrinin heç birindən keçmir.

**94.** İnteqralları hesablayın.

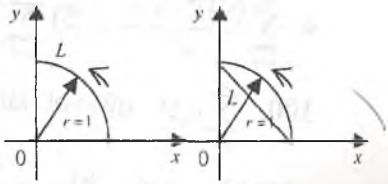
1) $\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} dz$, $a>1$; 2) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, $C$ – konturu $|z| \le a$ çevrəsini daxilinə alır; 3) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, $a$ nöqtəsi $C$ – konturunun daxilindədir.

**95.** $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ inteqralını aşağıdakı verilmiş yol üzrə hesablayın:

1)0 nöqtəsi $C$ – konturunun daxilində, 1 nöqtəsi isə xaricində yerləşir; 2) 1 nöqtəsi $C$ – konturunun daxilində, 0 nöqtəsi isə xaricində yerləşir; 3) 0 və 1 nöqtələri $C$ – konturunun daxilində yerləşir.

**96.** İnteqralları hesablayın.

1) $I_1 = \int_L z^2 dz$, $I_2 = \int_L z^3 dz$: a) $L$ – konturu şəkil 57 a)-da verilmişdir; b) $L$ – konturu şəkil 57 b)-də verilmişdir;




a) b)

Şəkil 57.

2) $\int_L e^{\bar{z}}dz$: $L$ – konturu $A(0;-\pi)$ və $B(\pi;0)$ nöqtələrini birləşdirən parçadır;

3) $\int_L \mathrm{Re}\, z^2 dz$: $L$ – konturu $z+\bar{z}=2$ və $|\mathrm{Im}\, z|\le 1$ münasibətləri ilə verilmişdir;

4) $\int_L e^{2z}dz$: $L$ – konturu $AOB$ üçbucağının $A(1;-1)$, $O(0;0)$ və $B(1;1)$ konturudur.

**97.** $\int_C \frac{e^{2\bar{z}}}{2z+i}dz$ inteqralını hesablayın.

1) $C$ – konturu mərkəzi koordinat başlanğıcında və tərəfi 0,5 olan kvadratdır;

2) $C$ – konturu $D$: $\begin{cases}|\mathrm{Re}\, z|<\frac{1}{2}\\ |\mathrm{Im}\, z|<1\end{cases}$ oblastının sərhədidir;

**98.** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qüvvət sırasının yığılmasını tədqiq edin, əgər

1) $c_n=\frac{n}{(2i)^n}$; 2) $c_n=\frac{n!}{(in)^n}$; 3) $c_n=e^{in}$; 4) $c_n=\frac{e^{in}}{n}$; 5) $c_n=\frac{e^{in\varphi}}{n}$;

6) $c_n=\frac{e^{in}}{n^2}$; 7) $c_n=\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$; 8) $c_n=\frac{\cos in}{2^n}$; 9) $c_n=\frac{n\sin in}{3^n}$.

**99.** Qüvvət sıralarının yığılmasını tədqiq edin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+in}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n+i}{n^2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-i)^n}{3^n}$.

**100.** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ qüvvət sırasının yığılma radiusunu müəyyən edin, əgər a) $c_n=n^n$; b) $c_n=\frac{1}{n!}$; v) $c_n=\frac{n}{2^n}$; q) $c_n=\cos(in)$.

**101.** Qüvvət sıralarının yığılma radiusunu tapın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\cdot 3^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)(z+i)^n}{(1+i)^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}z^{2^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(2n-1)^2\cdot 2^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cos in$;

13) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$; 14) $\sum_{n=0}^{\infty}3^n(z-1)^n$; 15) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^n}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)(z+i)^n}{(1+i)^n}$; 17) $\sum_{n=1}^{\infty}z^{2^n}$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(2n-1)^2\cdot 2^n}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$;

**102.** Sıraların yığılma oblastlarını tapın.

1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{1+in}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]z^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1+i)^n}{[3+4\cdot(-1)^n]^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(in))z^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}z^n$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right)$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z(z+n)}{n}\right)^n$; 14) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}(z+2i)^n\cdot\frac{2+i}{n}$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2\cdot 3^n}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(z-i)^n}{3^n}$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)^3}$; 21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+1)^n}$; 22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)(z+i)^n}{(1+i)^n}$; 23) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(z-i)^n$;

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+3}{z-3i}\right)^n$; 25) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2z+i}\right)^n$; 26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}$; 27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^n}(z-1)^n$;

28) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n e^{i+nz}$; 29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(z+1)^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{(z+1)^n}$;

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z+1)^n}{n+1}-\frac{3n+1}{3^n(z+1)^n}$; 31) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^n$;

32) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+i)^n\left(\frac{z-2}{z+i}\right)^n$; 33) $\sum_{n=1}^{\infty}(z-i)^n\cdot 3^n$; 34) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+i)^n\cdot 2^{n^2}}$;

35) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{z^n}+\frac{z^n}{3^n}\right)$; 36) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)^n$.

**103.** Aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma radiuslarını tapın.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cos in$;

**104.** $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ qüvvət sırasının yığılma radiusu $R\,(0<R<\infty)$ olarsa, aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma radiusunu müəyyən edin.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}n^k c_n z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n c_n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n^k z^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)c_n z^n$.

**105.** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ və $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ qüvvət sıralarının yığılma radiusları uyğun ola raq $r_1$ və $r_2$ ola rsa, onda a şağıdakı qüv vət sıra larının yığılma radiusları haqqında nə demək olar?

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}z^n$.

**106.** Aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma dairəsinin sərhədində yığılıb-yığılmaması haqqında nə demək olar?

1) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{pn}}{n}$ ($p$ – natural ədəddir); 6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}z^{3n-1}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$.

**107.** Aşağıdakı funksiyaları $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ şəklində qüvvət sırasına ayırın və yığılma radiusunu tapın.

1) $chz$; 2) $shz$; 3) $\sin^2 z$; 4) $ch^2 z$; 5) $(a+z)^{\alpha}$ $(a^{\alpha} = e^{\alpha \ln a})$;

6) $\sqrt{z+i}$ $(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}})$; 7) $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$; 8) $\frac{z}{z^2-4z+13}$;

9) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$; 10) $\ln\frac{1+z}{1-z}$; 11) $\ln(z^2-3z+2)$.

**108.** Aşağıdakı sıraların cəmini tapın.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n+1}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^n}{3^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{2n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n}$.

**109.** Aşağıdakı sıraların yığılma oblastlarını tapın.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (z-i)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+i)^n \cdot 2^{n^2}}$;

**110.** Aşağıdakı sıraların verilmiş çoxluqlarda müntəzəm yığılmasını isbat edin.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$, $|z| \le r \le \sqrt[3]{3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{3})^{2n}}{3^n}$, $|z+\sqrt{3}| \le r < \sqrt{3}$.

**111.** $f(z) = z^3$ funksiyasını $z-i$ qüvvətlərinə görə Teylor sırasına ayırın.

**112.** Verilmiş funksiyaları $z_0$ nöqtəsinin ətrafında Teylor sırasına ayırın və yığılma oblastını göstərin.

a) $\ln z$, $z_0 = 1$; b) $(1-z)e^z$, $z_0 = 0$; v) $\sin 2z - 2\sin z$, $z_0 = 0$.

**113.** Verilmiş funksiyaları $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ qüvvət sırasına ayırın və yığılma radiusunu tapın.

a) $\frac{1}{az+b}$, $b \neq 0$; b) $\frac{z}{z^2-4z+13}$; v) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

**114.** Məlum ayrılışlardan istifadə edərək verilmiş funksiyaları $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ qüvvət sırasına ayırın.

a) $\ln(z^2-3z+2)$; b) $\ln\frac{1+z}{1-z}$; v) $\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz$.

**115.** Verilmiş funksiyaları $z-1$ fərqinin dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın və yığılma radiusunu tapın.

a) $\frac{z}{z+2}$; b) $\frac{z}{z^2-2z+5}$; v) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

**116.** Verilmiş $f(z)=\ln z$ funksiyasını $z_0=2$ nöqtəsinin ətrafında Teylor sırasına ayırın.

**117.** Verilmiş funksiyaları $z$ dəyişəninin dərəcələrinə görə sıraya ayırın.

a) $\frac{2}{z^2-2z+2}$; b) $\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$; v) $\frac{4}{4+z^2}$; q) $\frac{z}{z^2-i}$.

**118.** $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ funksiyasını $0<|z-1|<1$ halqasında Loran sırasına ayırın.

**119.** $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$ funksiyasını $(z-2)$-nin dərəcələrinə görə Loran sırasına ayırın.

**120.** Aşağıdakı funksiyaları göstərilən oblastlarda Loran sırasına ayırın:

a) $f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}$ funksiyasını $1<|z|<2$ halqasında;

b) $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ funksiyasını $1<|z|<2$ halqasında;

v) $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$ funksiyasını $|z|>2$ oblastında.

**121.** Aşağıdakı funksiyaların $(z-z_0)$ dərəcələrinə görə ayrılışlarını yazın.

1) $\ln z$, $z_0=1$, $\ln 1=0$; 2) $\ln(1+z)$, $z_0=0$, $\ln 1=0$; 3) $\sin z$, $z_0=2$; 4) $e^z$, $z_0=2$; 5) $\ln(1+z)$, $z_0=2$.

**122.** $\frac{z+2}{z^2-2z-3}$ funksiyasını $z_0$ nöqtəsinin ətrafında Teylor sırasına ayırın.

1) $z_0=0$; 2) $z_0=1$.

**123.** Aşağıdakı funksiyaları $(z-1)$-in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın və yığılma radiusunu tapın.

1) $\frac{z}{z+2}$; 2) $\frac{z}{z^2-2z+5}$; 3) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$; 4) $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{1}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

5) $\ln z$; 6) $\sin(2z-z^2)$.

**124.** Aşağıdakı funksiyaların $z$-in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayrılışının ilk beş həddini tapın.

1) $e^{z\sin z}$; 2) $\sqrt{\cos z}$, ($z=0$ olduqda $\sqrt{\cos z}=1$);

3) $(1+z)^z=e^{z\ln(1+z)}$; 4) $e^{e^z}$; 5) $e^z\ln(1+z)$.

**125.** Aşağıdakı funksiyaların $z$ dəyişəninin dərəcələrinə görə ayrılışlarını yazın.

1) $\frac{1}{1-z}$; 2) $\frac{z^2}{z-1}$; 3) $ch3z$; 4) $e^{z+2}$; 5) $\sin^2 z$; 6) $\frac{1}{1-az}$; 7) $\frac{1}{a-z}$;

8) $\frac{1}{(1-z)^2}$; 9) $\frac{2z-1}{z+2}$; 10) $\frac{z^2-z+3}{z+2}$; 11) $\frac{2}{z^2-2z+2}$;

12) $\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$; 13) $\frac{4}{4+z^2}$; 14) $\frac{z}{z^2-i}$.

**126.** Aşağıdakı funksiyaları göstərilən halqalarda, ya da verilmiş nöqtələrin ətrafında Loran sırasına ayırın. İkinci halda ayrılışın mümkün olduğu oblastı göstərin.

1) $\frac{1}{z-2}$ funksiyasını $z=0$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında;

2) $\frac{1}{(z-a)^k}$, ($a\neq 0$, $k$ – natural ədəddir) funksiyasını $z=0$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında; 3) $\frac{1}{z(1-z)}$ funksiyasını $z=0$, $z=1$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında; 4) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $0<|a|<|b|$

funksiyasını $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında və $|a|<|z|<|b|$ halqasında; 5) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ funksiyasını $z=2$ nöqtəsinin ətrafında və $1<|z|<2$ halqasında; 6) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ funksiyasını $z=i$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında; 7) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $|b|\geq|a|$ funksiyasını $z=\infty$ nöqtəsinin ətrafında(funksiyanın hər iki budağına baxmalı); 8) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $\left(\operatorname{Im} f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0\right)$ funksiyasını $1<|z|<2$ halqasında; 9) $z^2e^{\frac{1}{z}}$ funksiyasını $z=0$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında; 10) $e^{\frac{1}{1-z}}$ funksiyasını $z=1$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında; 11) $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ funksiyasını $z=2$ nöqtəsinin ətrafında; 12) $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ funksiyasını $z=1$ nöqtəsinin ətrafında; 13) $e^{\frac{z+1}{z}}$ funksiyasını $0<|z|<\infty$ oblastında; 14) $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ funksiyasını $0<|z|<\infty$ oblastında; 15) $\sin\dfrac{z}{1-z}$ funksiyasını $z=1$ və $z=\infty$ nöqtələrinin ətrafında(sonuncu halda ilk dörd hədlə kifayətlənməli).

**127.** Aşağıdakı funksiyaların verilmiş nöqtələrin ətrafında Loran sırasına ayrılışının mümkünlüyünü araşdırın.

1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$; 3) $\sec\dfrac{1}{z-1}$, $z=1$; 4) $ctgz$, $z=\infty$; 5) $th\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z=0$; 7) $\dfrac{z}{\sin z-3}$, $z=\infty$;

8) $\ln z$, $z=0$; 9) $\ln\frac{1}{z}$, $z=\infty$; 10) $\ln\frac{z-1}{z+i}$, $z=\infty$; 11) $z^{\alpha}=e^{\alpha \ln z}$, $z=0$.

**128.** Aşağıdakı çoxqiymətli funksiyaların verilmiş nöqtələrin ətrafında Loran sırasına (o cümlədən Teylor sırasına) ayrılışı olan birqiymətli budaqları varmı?

1) $\sqrt{z}$, $z=0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$; 3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$;

4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$; 5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$;

6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$; 7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$; 8) $\sqrt{1+\sqrt{z^2-1}}$, $z=\infty$;

9) $\sqrt{1+\sqrt{z^2-1}}$, $z=1$; 10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{z}{z+1}}}$, $z=\infty$;

11) $Ln[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$.

**129.** $f(z)=\frac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ funksiyasını

1) $z_0=0$ nöqtəsinin ətrafında; 2)funksiyanın sıfırları ətrafında; 3)funksiyanın məxsusi nöqtələri ətrafında $z$ – in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın.

**130.** $f(z)=\frac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$ funksiyasını $z_0=1$ nöqtəsinin ətrafında $z$ – in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın.

**131.** Aşağıdakı funksiyaları verilmiş nöqtələrin ətrafında $z$ – in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın.

1) $f(z)=\frac{z^3+z}{(z-1)^3}$ funksiyasını sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında; 2) $f(z)=\frac{z+2i}{(1-2i-z)^2}$ funksiyasını onun sıfırları ətrafında; 3) $f(z)=\frac{z}{(3-z)^2}$ funksiyasını onun sıfırları ətrafında.

**132.** Aşağıdakı funksiyaları verilmiş nöqtələrin ətrafında $z-$in dərəcələrinə görə qüvvət sırasına ayırın.

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ funksiyasını a) $z_0=i$; b) $z_0=0$ nöqtəsinin ətrafında;

2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+i)}$ funksiyasını a) $z_0=0$; b) $z_0=i$; v) $z_0=\infty$;

q) $z_0=-i$ nöqtəsinin ətrafında.

**133.** Aşağıdakı funksiyalar üçün $z_0$ nöqtəsinin xarakterini müəyyən edin:

a) $\sin z+3\sin^2 z$, $z_0=k\pi$, $k\in Z$; b) $\sin(z-1)\cos^3\dfrac{\pi}{2}z$, $z_0=1$;

v) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{\sin^2(z-1)}$, $z_0=1$; q) $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.

**134.** Aşağıdakı funksiyalar üçün $z_0$ polyus nöqtəsinin tərtibini müəyyən edin:

a) $\dfrac{z}{\sin^3 z}$, $z_0=k\pi$, $k\in Z$; b) $\dfrac{z^2-3z+2}{(z^2-4)^2(z-1)^3}$, $z_0=2$, $z_0=1$;

v) $\dfrac{\cos\pi z+1}{(z^2-z-2)^3}$, $z_0=-1$, $z_0=2$.

**135.** Aşağıdakı funksiyalar üçün məxsusi nöqtələri tapın və tipini müəyyən edin (polyus nöqtələri üçün isə tərtibi müəyyən edin):

a) $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$; b) $ctgz$; v) $\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$; q) $e^{\frac{1}{z-2i}}$; d) $\cos\dfrac{1}{z+i}$.

**136.** Aşağıdakı funksiyaların məxsusi nöqtələrini tapın:

a) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$; b) $f(z)=\dfrac{\sin\dfrac{1}{z}}{(z^3+1)(z-1)^2}$;

v) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$; q) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2+1)(z^2-1)^2}$.

**137.** Aşağıdakı funksiyaların üçün $z=0$ nöqtəsinin tipini müəyyən edin:

a) $\exp\left(\frac{\sin z}{z}\right)$; b) $\frac{z+3z^3}{\ln(1-2z)}$; v) $\frac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$;

q) $(e^z-1-z)ctg^3 z$; d) $\frac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$; e) $\exp\left(\frac{1}{z^2-z}\right)$.

**138.** Aşağıdakı funksiyalar üçün məxsusi nöqtələri tapın və tipini müəyyən edin:

a) $\frac{1}{z^3+1}$; b) $\frac{e^{iz}}{z^3}$; v) $\frac{\exp\left(\frac{1}{z+1}\right)}{(z+1)^3}$; q) $\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)^2}$.

**139.** Aşağıdakı funksiyalar üçün məxsusi nöqtələri tapın və tipini müəyyən edin:

a) $\frac{z^4+1}{z^4-1}$; b) $z\cos\frac{1}{z}-z$; v) $z^3\sin\frac{1}{z}-z^2$.

**140.** Aşağıdakı funksiyalar üçün $z_0=0$ sıfırının tərtibini müəyyən edin.

1) $f(z)=(e^z-1)^2-\sin^2 z$; 2) $f(z)=(e^{z^2}-1)^2+(\cos z-1)^2$;

3) $f(z)=(e^{z^3}-1)^2-4(1-\cos z)^2$.

**141.** Aşağıdakı funksiyaların bütün məxsusi nöqtələrini tapın və tipini müəyyən edin:

1) $f(z)=\frac{e^{-z}+1}{z^3+z^2-2}$; 2) $f(z)=\frac{z^3+z^2-2}{e^{-z}+1}$;

3) $\cos\frac{1}{z+1}+\frac{z^3}{z^2+1}e^{\frac{1}{z}}$; 4) $f(z)=\frac{z^2e^z\sin\frac{1}{z}}{e^z-1}$.

**142.** Aşağıdakı funksiyalar üçün məxsusi nöqtələri tapın, tipini müəyyən edin və sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında funksiyaları tədqiq edin:

a) $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$; b) $f(z)=\frac{z^4}{1+z^4}$; v) $f(z)=\frac{z^5}{(1-z)^3}$:

q) $f(z)=\frac{1+z^2}{e^z}$; d) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$; e) $f(z)=\frac{\sin z}{4z+3}$.

**143.** Aşağıdakı funksiyanın polyuslarını tapın:

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}.$$

**144.** Aşağıdakı funksiyaların məxsusi nöqtələrini tapın:

a) $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$; b) $f(z)=\sin\frac{1}{z}$.

**145.** Aşağıdakı funksiyalar üçün məxsusi nöqtələri tapın, tipini müəyyən edin və sonsuz uzaqlaşmış nöqtənin ətrafında funksiyaları tədqiq edin:

1) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+4)^2}$; 2) $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$; 3) $f(z)=ze^{-z}$ : 4) $f(z)=ze^{-\frac{1}{z}}$;

5) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$; 6) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$. 7) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$; 8) $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$;

9) $f(z)=\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$; 10) $f(z)=e^{-z}\cos\frac{1}{z}$; 11) $\frac{1}{z-z^3}$; 12) $\frac{z^4}{1+z^4}$;

13) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$; 14) $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$; 15) $\frac{e^z}{1+z^2}$; 16) $\frac{z^2+1}{e^z}$; 17) $ze^{-z}$;

18) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$; 19) $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$; 20) $\frac{1-e^z}{2+e^z}$; 21) $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$;

22) $thz$; 23) $e^{-\frac{1}{z^2}}$; 24) $ze^{\frac{1}{z}}$; 25) $e^{\frac{z}{1-z}}$; 26) $e^{\frac{z-1}{z}}$; 27) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$; 28) $\frac{1}{\sin z}$;

29) $\frac{\cos z}{z^2}$; 30) $tgz$; 31) $tg^2z$; 32) $\frac{ctgz}{z^2}$; 33) $ctgz-\frac{1}{z}$; 34) $ctgz-\frac{2}{z}$;

35) $\frac{1}{\sin z-\sin a}$; 36) $\frac{1}{\cos z+\cos a}$; 37) $\sin\frac{1}{1-z}$;

38) $\frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}$; 39) $ctg\frac{1}{z}$; 40) $ctg\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$; 41) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$;

42) $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$; 43) $e^{ctg\left(\frac{1}{z}\right)}$; 44) $e^{\frac{tg\,1}{z}}$; 45) $\sin\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$;

46) $\sin\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$.

**146.** Aşağıdakı funksiyalar üçün $z_0$ nöqtəsində çıxıqları hesablayın:

a) $\frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$, $z_0=3$, $z_0=-2$; b) $\frac{\cos z}{z^3(z+4)}$, $z_0=0$;

v) $tgz$, $z_0=\frac{\pi}{2}$; q) $e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0=-2$; d) $\sin\frac{4}{z-1}$, $z_0=1$.

**147.** Aşağıdakı funksiyalar üçün onların məxsusi nöqtələrində çıxıqlarını hesablayın:

a) $\frac{z^2+z-1}{z^3(z-1)}$; b) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; v) $\frac{1}{\sin z}$; q) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$; d) $e^{z+\frac{1}{z}}$.

**148.** Funksiyaların göstərilən nöqtələrdə çıxıqlarını hesablayın:

a) $\frac{1}{1-\cos z}$, $z_0=0$; b) $\frac{1}{z^3-z^5}$, $z_0=0$, $z_0=\pm1$; v) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$,

$z_0=\pm i$; q) $e^z\ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}$, $z_0=\infty$; d) $f(z)=\frac{e^z}{1+z}$, $z_1=-1$, $z_2=\infty$

**149.** Aşağıdakı funksiyaların sonlu məxsusi nöqtələrində və sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə çıxıqlarını hesablayın:

a) $\frac{1}{z(1-z^2)}$; b) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; v) $ctg^2z$; q) $ctg^3z$; d) $\cos\frac{1}{z-2}$;

e) $\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}$; j) $\sin\frac{z}{z+1}$; z) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$; i) $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$; k) $\frac{e^z}{z(z-1)^2}$

**150.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$; b) $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+4z}$; v) $\int\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1}$, $C$ – konturu $x^2+y^2=2x$ çevrəsidir; q) $\int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}dz$; e) $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z-2)}$; j) $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{(z-i)(z-3)}$.

**151.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralı hesablayın $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, əgər a) $C:|z|=1$; b) $C:|z|=3$; v) $C:|z|=5$.

**152.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^{20}dz}{(2z^2+1)^2(z^4-1)^3}$; b) $\int\limits_{|z|=4} \frac{(z^3+1)dz}{(z+2)^2(z-3)}$;

v) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos zdz}{z^3(z+4)}$; q) $\int\limits_{|z|=3} z^3\cos\frac{1}{z-2}dz$; e) $\int\limits_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz$.

**153.** Sonsuz uzaqlaşmış nöqtədəki çıxığın köməyi lə aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^{15}+1}$; b) $\int\limits_{|z|=1.1} \frac{(z^5+z^3)dz}{z^4+1}$;

v) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z+1)^2(z+2)(z+4)}dz$; q) $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2}dz$.

**154.** Aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3dz}{z^4+2}$; b) $\int\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-2)^2(z-1)}$; v) $\int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2dz}{z^4+1}$;

q) $\int\limits_{|z|=1} \frac{ctgzdz}{4z-\pi}$; d) $\int\limits_{|z-1-i|=1} \frac{dz}{z^3+1}$.

**155.** Aşağıdakı funksiyaların üçün $z=0$ və $z=\infty$ nöqtələrində çıxıqlarını hesablayın:

1) $\frac{\sin z}{z^2}$; 2) $\frac{\sin 1}{z^2}$; 3) $\sin\frac{1}{z^2}$; 4) $\frac{z^2}{\sin z}$.

**156.** Aşağıdakı funksiyaların üçün bütün məxsusi nöqtələrdə çıxıqlarını hesablayın:

1) $\cos\frac{2}{z-1}$; 2) $\sin^2\frac{1}{z}$; 3) $\cos^2\frac{1}{2z+1}$; 4) $(z-3)e^{\frac{z}{z-3}}$; 5) $\frac{z+1}{z^2(z-1)^2}$;

6) $\frac{z+1}{(z^2-z-2)^2}$; 7) $\frac{z+1}{z^2e^{z^2}}$; 8) $\frac{e^{z+1}}{(z+1)^2}$; 9) $\frac{(z^2+i)^2(z-1)}{(z^2+1)(z+i)}$.

**157.** Aşağıdakı funksiyaların üçün onların məxsusi nöqtələrinin tipini müəyyən edin və bu nöqtələrdə çıxıqları hesablayın:

1) $\left(\frac{z+1}{z}\right)^2$; 2) $\left(\frac{z+1}{z}\right)^2 e^z$; 3) $z+1+\frac{2}{z+1}$; 4) $\frac{1}{z}+\frac{2}{z+1}$;

5) $\frac{\sin z}{z^3(z+\pi)}$; 6) $\frac{\sin z}{z(z+\pi)^3}$; 7) $\frac{\sin z}{z^2(z+\pi)^2}$.

**158.** Aşağıdakı funksiyaların üçün bütün məxsusi nöqtələrdə çıxıqlarını hesablayın:

1) $\frac{e^{z-i}}{z^2+1}$; 2) $\frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z^2+1}$; 3) $e^z+\cos z$; 4) $\frac{z}{z^2+16}\cos\frac{1}{z}$; 5) $z^2\sin\frac{1}{z-i}$;

6) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{5}{z+7}+e^{\frac{z+7}{z+1}}$; 7) $\sin z\sin\frac{1}{z}$; 8) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$.

**159.** Aşağıdakı funksiyalar üçün onların izolə edilmiş məxsusi nöqtələrində və sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə (əgər sonsuz uzaqlaşmış nöqtə məxsusi nöqtələr üçün limit nöqtəsi deyilsə) çıxıqlarını hesablayın:

1) $\frac{1}{z^3-z^5}$; 2) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; 3) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n$ – natural ədəddir;

4) $\frac{1}{z(1-z^2)}$; 5) $\frac{z^3+z-1}{z^2(z-1)}$; 6) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; 7) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; 8) $tgz$;

9) $\frac{1}{\sin z}$; 10) $ctg^2 z$; 11) $ctg^3 z$; 12) $\cos\frac{1}{z-2}$; 13) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$;

14) $e^{z+\frac{1}{z}}$; 15) $\sin z \sin\frac{1}{z}$; 16) $\sin\frac{z}{z+1}$; 17) $\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}$;

18) $\frac{1}{z(1-e^{-hz})}$, $h\neq 0$; 19) $z^n \sin\frac{1}{z}$, $n$ – tam ədəddir;

20) $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$; 21) $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

**160.** Aşağıdakı funksiyaların verilmiş nöqtələrdə çıxıqlarını hesablayın:

1) a) $\frac{\sin 2z - 2z}{(1-\cos z)^2}$; b) $\frac{(1-chz)shz}{(1-\cos z)\sin^2 z}$; v) $\frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$ funksiyalarının

$z=0$ nöqtəsində; 2)a) $\frac{z\cos\frac{1}{z}}{z^2-1}$; b) $\frac{z^4+1}{2z^6-1}$; v) $\frac{e^{\frac{2}{z-1}}(z-1)}{2z^2+1}$

funksiyalarının $z=\infty$ nöqtəsində.

**161.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1) $\int_C \frac{(z^5+8z)dz}{z^4-16}$, $C$ – konturu $x^2+y^2=6y$ çevrəsidir;

2) $\int_C \frac{(z^3+z)dz}{z^4+16}$, $C$ – konturu $\{|z|<3, \operatorname{Re} z<0\}$ oblastının sərhədidir;

3) $\int_C \frac{z^3 dz}{z^3+1}$, $C$ – konturu $|z|=2$ çevrəsidir; 4) $\int_C \frac{zdz}{(z^2-9)^2}$,

$C$ – konturu $y^2=x$ parabolasının qövsü ilə $x=4$ düz xətt parçasından ibarətdir.

**162.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1) $\int_{\partial C} \frac{e^z dz}{z\sin z}$, $C:|z+i|<2$; 2) $\int_{\partial C}\sin\frac{z+1}{z}dz$, $C:|z|>1$;

3) $\int\limits_{\partial C} \sin\frac{z}{z+1}dz$, $C:|z|<2$; 4) $\int\limits_{\partial C} \frac{z+1}{(z-4)(z^{13}-1)}dz$, $C:|z|<3$;

5) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$; 6) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{(z-\pi)^2}dz$; 7) $\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin\frac{z}{2}}dz$;

8) $\int\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 sh^2 2z}dz$; 9) $\int\limits_{|z|=2} (1+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}-e^{\frac{1}{z+1}}\right)dz$;

10) $\int\limits_{|z-3|=2} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}-e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$; 11) $\int\limits_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}}dz$;

12) $\int\limits_{|z+4|=5} \frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz$; 13) $\int\limits_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+2e^{\frac{1}{z-1}}-3e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$;

14) $\int\limits_{|z+2|=3} \frac{z^2\sin^2\frac{1}{z}}{(z+1)(z+2)}dz$.

**163.** Aşağıdakı müəyyən inteqralları $e^{i\varphi}=z$ əvəzləməsi aparmaqla hesablayın.

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}$; b) $\int\limits_0^{\pi} tg(\varphi+i)d\varphi$.

**164.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x dx}{5-4\cos x}$; b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x dx}{1-2p\cos x+p^2}$, $|p|<1$; v) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3x dx}{1-2p\cos 2x+p^2}$, $|p|<1$.

**165.** İnteqralları hesablayın.

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, $a>1$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}dx$; $a>0$, $\alpha>0$.

**166.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın ($n$ – tam, $a$ – həqiqi ədəddir):

a) $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi$; b) $\int\limits_0^{\pi} tg(x+ia)dx$.

**167.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

a) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha x}{x} dx$; b) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$; v) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+r^2} dx$, $a>0$;

q) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+1} dx$, $a>0$; d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx$, $a>0$, $b>0$.

**168.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$; v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$;

q) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+b^2)^2} dx$, $a>0$; d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$, $a>0$, $b>0$.

**169.** Aşağıdakı müəyyən inteqralları çıxıqların köməyi ilə hesablayın:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi + 2} d\varphi$; 2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{5+3\cos \varphi} d\varphi$; 3) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+3\cos^2 x)^2}$;

4) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4-3\sin^2 x)^2}$; 5) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+2\cos \varphi)^2}$.

**170.** Aşağıdakı qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}$; 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x+i)}$;

4) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$; 5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+3}{x^4+10x^2+9} dx$; 6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+8i}$; 7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2-x+1}$;

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos x dx}{x^2-2x+2}$; 9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix} dx}{x^2+1}$; 10) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2+1)^2}$; 11) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix} dx}{x^2+4}$;

12) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix} dx}{x^2-2x+2}$; 13) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x dx}{x^2+9}$; 14) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos 4x dx}{x^2-4x+6}$;

15) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 6x dx}{x^2+4x+13}$; 16) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2+16}$; 17) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x dx}{x^2+16}$;

18) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x-i)}$; 19) $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 3x dx}{4+x^2}$; 20) $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{2}x dx}{1+x^2}$;

21) $\int_{0}^{\infty}\frac{x^2 dx}{x^4+16}$; 22) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

**171.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı qapalı kontur üzrə inteqralları hesablayın:

1) $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, $C$ – konturu $x^2+y^2=2x$ çevrəsidir;

2) $\int_C \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, $C$ – konturu $|z-2|=\frac{1}{2}$ çevrəsidir;

3) $\int_C \frac{zdz}{(z-3)(z^5-1)}$, $C$ – konturu $|z|=2$ çevrəsidir; 4) $\int_C \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$,

$C$ – konturu $|z|=1$ çevrəsidir; 5) $\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$, $C$ – konturu $|z|=1$

çevrəsidir; 6) $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}dz$, $C$ – konturu $|z|=r$ çevrəsidir;

7) $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}dz$, $C$ – konturu $|z|=r$ çevrəsidir; 8) $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{\frac{2}{z}}dz$,

$n$ – tam ədəddir, $C$ – konturu $|z|=r$ çevrəsidir;

9) $\int_{|z|=3}(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})dz$; 10) $\int_{|z|=5}\frac{zdz}{\sin z(1-\cos z)}$.

**172.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı müəyyən inteqralları hesablayın. Əgər inteqral qeyri-məxsusi və dağılandırsa, onda onun baş qiymətini hesablayın (əgər o varsa):

1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$, $a>1$. *Göstəriş.* $e^{i\varphi}=z$ əvəzləməsindən istifadə edin;

2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, $a>b>0$; 3) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$, $a>0, b>0$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $a$ – kompleks ədəddir və $a \neq \pm 1$; 5) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $a$ – kompleks ədəddir və $a \neq \pm 1$;

6) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi$, $n$ – tam ədəddir; 7) $\int_0^{2\pi} tg(x+ia)dx$, $a$ – həqiqi ədəddir; 8) $\int_0^{2\pi} ctg(x+a)dx$, $a$ – kompleks ədəddir və $\mathrm{Im}\, a \neq 0$.

**173.** Çıxıqların köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$; 3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n$ – natural ədəddir; 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a>0, b>0$;

5) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; 6) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \geq 2$ – natural ədəddir; 7) $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$, $n \geq 2$ – natural ədəddir.

**174.** Aşağıdakı inteqralları hesablayın ($a$ və $b$ müsbət ədədlərdir):

1) $\int_0^{\infty} \frac{(x^2-b^2)\sin ax}{(x^2+b^2)x}dx$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$; 3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}dx$;

4) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$; 5) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$; 6) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}dx$;

7) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$; 8) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx$; 9) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}dx$;

10) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2}dx$; 11) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$; 12) $\int_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\frac{dx}{x+a}$.

**175.** Aşağıdakı inteqralları Jordan lemmasından istifadə edərək hesablayın:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$; v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

**176.** $w=2z^2+z$ analitik funksiyası vasitəsilə $z_0$ nöqtəsində inikas zamanı dönmə bucağını və gərilmə əmsalını tapın.

a) $z_0=-\frac{1}{4}+i$; b) $z_0=-\frac{i}{4}$.

**177.** $w$ funksiyası üçün Koşi-Riman şərtinin ödənməsini yoxlayın. $w$ funksiyası vasitəsilə $z_0$ nöqtəsində inikas zamanı dönmə bucağını və gərilmə əmsalını tapın.

a) $w=\frac{1}{z}$; $z_0=3i$; b) $w=z\ln z$, $z_0=1$;

v) $w=\frac{z+i}{z-i}$; $z_0=2i$; q) $u=e^y\cos x$, $v=-e^y\sin x$, $z_0=\frac{\pi}{3}$.

**178.** Ruşe teoremindən istifadə etməklə aşağıdakı tənliklərin $|z|<1$ dairəsində yerləşən köklərinin sayını tapın.

1) $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$; 2) $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$;

3) $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

**179.** $z^4-5z+1=0$ tənliyinin $|z|<1$ dairəsində; $1<|z|<2$ halqasında neçə kökü var?

**180.** $z^4-8z+10=0$ tənliyinin $|z|<1$ dairəsində; $1<|z|<3$ halqasında neçə kökü var?

**181.** Əgər $|a_0|>|a_1|+|a_2|+1$ olarsa, onda $z^n+a_0z^2+a_1z+a_2=0$ tənliyinin $|z|<1$ dairəsində neçə kökü var? ($n$ – natural ədəddir).

**182.** $e^z-4z^n+1=0$ tənliyinin $|z|<1$ dairəsində neçə kökü var? ($n$ – natural ədəddir).

**183.** Aşağıdakı funksiyanın sıfırlarını tapın və onların tərtibini müəyyən edin.

1) $f(z)=z^4-2z^3+5z^2-8z+4$; 2) $f(z)=\dfrac{\sin^4 z}{z(z-\pi)^2}$;

3) $f(z)=(z^4+2z^3+1)(z^2-2z+2)$.

**184.** Aşağıdakı çoxhədlilərin sıfırlarının sayını verilmiş çoxluqda müəyyən edin:

1) $z^5+z^4+z^3+3z^2-z+15$ sol yarımmüstəvidə; 2) $z^3-2z+5$ sağ yarımmüstəvidə.

**185.** Aşağıdakı çoxhədlilərin köklərinin sayını verilmiş çoxluqda müəyyən edin:

1) $2z^4-z^3-4z^2+8z+5=0$ sağ yarımmüstəvidə;

2) $z^5-5z^2-4z-10=0$ sol yarımmüstəvidə;

3) $z^6-6z^5+5z^4+5z-5=0$ sağ yarımmüstəvidə;

4) $z^8+5z^7-z^4+2=0$ : a) $|z|<1$ dairəsində; b) $4<|z|<6$ halqasında; 5) $3z^4+chiz=0$ $|z|<\dfrac{1}{2}$ dairəsində;

6) $z^4+4z+\cos z=0$ $|z|<1$ dairəsində; 7) $e^z+8z^2=0$ $|z|<\dfrac{1}{2}$ dairəsində; 8) $e^z-z=2$ sol yarımmüstəvidə;

9) $z^7+5z^4-z^2+2=0$ $1<|z|<2$ halqasında; 10) $z^3+4z^2-5=0$ sol yarımmüstəvidə.

**186.** Əgər $|a|>\dfrac{e^R}{R^n}$ olarsa, onda $e^z=az^n$ tənliyinin $|z|<R$ dairəsində neçə kökü var? ($n$ – natural ədəddir).

**187.** Aşağıdakı funksiyalar üçün $z=0$-ın tərtibini tapın.

1) $z^2(e^{z^2}-1)$; 2) $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$; 3) $e^{\sin z}-e^{tgz}$.

**188.** $z_0$ nöqtəsi $f(z)$ funksiyası üçün $k$, $\varphi(z)$ funksiyası üçün isə $l$ tərtibli sıfır olarsa, onda aşağıdakı funksiyalar üçün hansı tərtibli sıfır olar?

1) $f(z)\varphi(z)$; 2) $f(z)+\varphi(z)$; 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$.

**189.** Aşağıdakı funksiyalar üçün bütün sıfırların tərtibini tapın.

1) $z^2+9$; 2) $\frac{z^2+9}{z^4}$; 3) $z\sin z$; 4) $(1-e^z)(z^2-4)^3$; 5) $1-\cos z$;

6) $\frac{(z^2-\pi^2)\sin z}{z^7}$; 7) $\frac{1-ctgz}{z}$; 8) $e^{tgz}$; 9) $\sin^3 z$; 10) $\frac{\sin^3 z}{z}$;

11) $\sin z^3$; 12) $z\cos^3$ ; 13) $\cos z^3$; 14) $(\sqrt{2}-2)^3$;

15) $(1-\sqrt{2-2\cos z})^2$.

**190.** $w$ inikası zamanı $z$ müstəvisinin hansı hissəsi sıxılır və hansı hissəsi gərilir?

a) $w=2z^2-8z-1$; b) $w=\frac{1}{\bar{z}}$.

**191.** $w=(2+i)z$ inikası zamanı $A(1;3)$ və $B(5;3)$ nöqtələrini birləşdirən parçanın obrazını və dönmə bucağını tapın.

**192.** $z$ müstəvisində təpələri $3+2i$, $7+2i$ və $5+4i$ nöqtələrində olan üçbucağı $w$ müstəvisində təpələri $0$, $-2i$ və $1-i$ nöqtələrində olan oxşar üçbucağa çevirən xətti funksiyanı tapın.

**193.** $z$ müstəvisində $|z-i|<2$ dairəsini $w$ müstəvisində $|w-2|<4$ dairəsinə keçirən elə xətti çevirməni tapın ki, o birinci dairənin üfüqi diametrini ikinci dairənin üfüqi diametrinə keçirsin.

**194.** $-7\le \operatorname{Re} z\le -3$, $2\le \operatorname{Im} z\le 4$ düzbucaqlısının $-4\le \operatorname{Re} w\le 0$, $-8\le \operatorname{Im} w\le 0$ düzbucaqlısına inikasını tapın.

**195.** $w=iz-1$ çevirməsi zamanı $z$ müstəvisində təpələri $0$, $3$ və $2i$ nöqtələrində olan üçbucağın $w$ müstəvisində inikas olunduğu oblastı tapın.

**196.** $w=\frac{1+i}{2}z+\frac{3-i}{2}$ çevirməsi zamanı $z$ müstəvisində təpələri $3$, $5+2i$ və $2+5i$ nöqtələrində olan düzbucaqlının $w$ müstəvisində inikas olunduğu oblastı tapın.

**197.** $i$ nöqtəsini $-i$ nöqtəsinə keçirən və tərpənməz $1+2i$ nöqtəsinə malik xətti çevirməni tapın (əgər $w=f(z)$ inikası üçün $f(z_0)=z_0$ şərti ödənirsə, onda $z_0$ nöqtəsinə tərpənməz nöqtə deyilir).

**198.** Tutaq ki, $w=\frac{1}{z}$ inikası verilmişdir. Bu inikas zamanı

a) $x^2+y^2=ax$ çevrələr ailəsi;

b) $y=x+b$ paralel düz xətlər dəstəsi hansı xətlərə çevriləcəklər?

**199.** $w=\frac{1}{z}$ inikası zamanı $x=0, y\geq 0$ şüaları, $y=0, 0\leq x\leq 2$ parçası və $x=2, y\geq 0$ şüası ilə məhdudlaşmış $G$ çoxluğunun obrazını tapın.

**200.** $w=\frac{1}{z}$ inikası zamanı $x=0{,}9\leq y\leq 1$, $y=0, 0\leq x\leq 1$ parçaları və $|z|=1$ dairəsi ilə məhdudlaşmış $G$ çoxluğunun obrazını tapın.

**201.** $w=\frac{1}{z}$ inikası zamanı $0<\arg z<\frac{\pi}{2}, 1<|z|<2$ dairəvi halqanın hissəsi olan $G$ çoxluğunun obrazını tapın.

**202.** $z_1=i, z_2=1, z_3=\infty$ nöqtələrini $w_1=0, w_2=\infty, w_3=1-i$ nöqtələrinə inikas etdirən kəsr-xətti funksiyanı tapın.

**203.** $(1;0),(0;1),(-1;0)$ nöqtələrini $(-1;0),(0;0),(1;0)$ nöqtələrinə inikas etdirən kəsr-xətti funksiyanı tapın.

**204.** $w=\frac{z}{z-1}$ inikası zamanı $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ inikas olunduğu oblastı qurun.

**205.** $w=\frac{1-z}{z}$ inikası zamanı $|z|=1$ çevrəsinin çevrildiyi çoxluğu tapın.

**206.** $w=\frac{z+2}{iz+1}$ inikası zamanı $|z+1|\leq 1, \operatorname{Im} z>0$ yarımçevrəsinin çevrildiyi oblastı tapın.

**207.** $w=i\frac{z-1}{z+i}$ inikası zamanı $|z|<1$ dairəsinin çevrildiyi oblastı tapın.

**208.** $w=\frac{z-i}{z}$ inikası zamanı $\operatorname{Im} z>1$ yarımmüstəvisinin obrazını tapın.

**209.** $w=\frac{z-i}{z+i}$ inikası zamanı mərkəzləri $(-1;0)$ və $(1;0)$ nöqtələrində və raidusları $\sqrt{2}$ olan çevrələrin kəsişmə oblastının obrazını tapın.

**210.** $i,-1,0$ nöqtələrini $1,\infty,2$ nöqtələrinə keçirən kəsr-xətti çevirmənin tərpənməz nöqtəsini tapın (əgər $w=f(z)$ inikası üçün $f(z_0)=z_0$ şərti ödənirsə, onda $z_0$ nöqtəsinə tərpənməz nöqtə deyilir).

**211.** $w$ kəsr -xətti çevirmələrin köməyi ilə oblastların obrazlarını tapın:

a) $w=\frac{z+1}{z+2}$ inikası zamanı $1<|z|<2$ halqası;

b) $w=\frac{z-i}{z+i}$ inikası zamanı $|z|<1, |z-1|<\sqrt{2}$ dairələnin kəsişməsi.

**212.** Aşağıdakı konform inikasları verən funksiyaları tapın:

a) $|z|<1$ dairəsini $\operatorname{Im} w<0$ yarımmüstəvisinə elə inikas etdirsin ki, $z=1, z=i, z=-i$ nöqtələri $w=1, w=0, w=-1$ nöqtələrinə keçsin;

b) $|z|<1$ dairəsini özünə elə inikas etdirsin ki, $z=-1, z=i, z=1$ nöqtələri $w=-1, w=\frac{1}{5}(4+3i), w=1$ nöqtələrinə keçsin.

**213.** $|z-3|>9$, $|z-8|<16$ oblastlarını $r<|w|<1$ halqasına konform inikas etdirən funksiyanı qurun.

**214.** $w(0)=0$, $w(i-1)=\infty$, $w(-1)=i$ şərtlərini ödəyən kəsr-xətti inikası tapın. $|z-i|<1$, $\operatorname{Re} z\le 0$ çoxluğunun obrazını qurun.

**215.** Yuxarı yarımmüstəvinin vahid radiuslu dairəyə elə inikasını qurun ki, o həqiqi oxun $-1,0,1$ nöqtələrini dairənin $1,i,-1$ nöqtələrinə keçirsin.

**216.** Vahid radiuslu dairəni özünə keçirən elə çevirməni tapın ki, o $1$ və $i$ nöqtələrini $\infty$ nöqtəsinə keçirsin.

**217.** $w=\frac{z}{z-1}$ inikası zamanı $1<|z|<2$ halqası hansı oblasta keçir?

**218.** $w=\frac{az+b}{cz+d}$ kəsr-xətti funksiyası hansı şərtlər daxilində $|z|<1$ dairəsini yuxarı yarımmüstəviyə keçirrər?

**219.** $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ düzbucaqlısının $w = e^z$ inikası zamanı nəyə çevrildiyini müəyyən edin.

**220.** a) $\operatorname{Re} z \geq 0$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ yarımzolağını $|w| \leq 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$ yarımdairəsinə; b) $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ yarımzolağını $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ yarımdairəsinə inikas etdirən çevirməni tapın.

**221.** a) $y = x$, $y = x + h$ zolağının; b) $|z| = 2$, $|z - 1| = 1$ çevrəlinin kəsişməsinin; v) $|z| < 2$, $|z - 3| < 1$ dairələri atılmış müstəvinin yuxarı $\operatorname{Im} w > 0$ yarımmüstəvisinə inikasını tapın.

**222.** Loqarifmik funksiyanın birqiymətli qanadının inikası zamanı a) $z_0 = 1$ nöqtəsi $w_0 = 4\pi i$ nöqtəsinə;

b) $z_0 = -i$ nöqtəsi $w_0 = -\frac{1}{2}\pi i$ nöqtəsinə keçməsi halında həqiqi oxun mənfi hissəsi boyunca kəsiyi olan müstəvinin obrazını tapın.

**223.** Loqarifmik funksiyanın birqiymətli qanadının inikası zamanı $z_0 = -1$ nöqtəsi $w_0 = \pi i$ nöqtəsinə keçməsi halında həqiqi oxun müsbət hissəsi boyunca kəsiyi olan müstəvinin obrazını tapın.

**224.** $w = \ln z$ inikası zamanı $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ kvadrantının hansı oblasta keçdiyini tapın.

**225.** $w = \ln z$ funksiyası $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $1 < |z| < e$ dairəvi halqasının hissəsi olan $G$ oblastını hansı oblasta inikas etdirdiyini tapın.

**226.** $0 < \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{2}$ oblastını $\operatorname{Re} w > 0$ oblastına inikas etdirən qüvvət funksiyasını tapın.

**227.** $w = z^2$ funksiyası vasitəsilə $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ kvadratını inikas etdirin.

**228.** $w = z^2$ funksiyası vasitəsilə $y = x^2$ parabolasını $w$ müstəvisinə inikas etdirin.

**229.** $w = -z^2$ funksiyası vasitəsilə $x + y = 1$ düz xəttini $w$ müstəvisinə inikas etdirin.

**230.** $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ kvadrantını $|w| < 1$ dairəsinə konform inikas

etdirən elə $w$ funksiyasını tapın ki, $z=1+i, z=0$ nöqtələri uyğun olaraq $w=0, w=1$ nöqtələrinə keçsin.

**231.** $0<\arg z<\frac{\pi}{6}$ sektorunu $|w|<1$ dairəsinə birqiymətli konform inikas etdirən $w$ funksiyasını tapın.

**232.** $w=z^2$ funksiyasının $y=0, x^2-y^2=1$, $xy=1, x=0$, $y^2-x^2=1$ xətləri ilə məhdudlaşmış oblastı hansı oblasta inikas etdirdiyini tapın.

**233.** $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ polyar şəbəkənin $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ funksiyası vasitəsi ilə çevirməsini tapın.

**234.** a) $|z|<R<1$ dairəsini; b) $|z|<1$ dairəsini; v) $\operatorname{Im} z>0$ müstəvisini Jukovski funksiyası hansı oblasta inikas etdirir?

**235.** Jukovski funksiyası vasitəsi ilə inikas zamanı aşağıdakı oblastların obrazlarını tapın: a) $\operatorname{Im} z>0$, $1<|z|<R$ yarımhalqasının;

b) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$ bucağının.

**236.** $w=z^2$ və $w=z^3$ funksiyaları ilə inikasda $z_0$ nöqtəsindən çıxan istiqamətin dönmə bucağını $(\theta)$ və gərilmə əmsalını $(k)$ tapın.

1) $z_0=1$; 2) $z_0=-\frac{1}{4}$; 3) $z_0=1+i$; 4) $z_0=-3+4i$.

**237.** Aşağıdakı funksiyalarla inikasda müstəvinin hansı hissəsi sıxılır, hansı hissəsi genişlənir?

1) $w=z^2$; 2) $w=z^2+2z$; 3) $w=\frac{1}{z}$; 4) $w=e^z$; 5) $w=\ln(z-1)$.

**238.** Aşağıdakı funksiyalarla inikasda müstəvinin hansı hissəsi sıxılır, hansı hissəsi genişlənir?

1) $w=z^2$; 2) $w=z^2+2z$; 3) $w=\frac{1}{z}$; 4) $w=e^z$; 5) $w=\ln(z-1)$.

**239.** Təpələri $0,1,i$ nöqtələrində olan üçbucağı təpələri $0,2,1+i$ nöqtələrində olan oxşar üçbucağa inikas etdirən tam xətti çevirməni tapın.

**240.** $i$ nöqtəsini $-i$ nöqtəsinə çevirən və tərpənməz $1+2i$ nöqtəsinə malik tam xətti çevirməni tapın.

**241.** Aşağıdakı inikasları yerinə yetirən tam xətti çevirmələri tapın. 1)yuxarı yarımmüstəvinin özünə inikas etdirən; 2)yuxarı yarımmüstəvini aşağı yarımmüstəviyə keçirən; 3)yuxarı yarımmüstəvini sağ yarımmüstəviyə keçirən; 4) sağ yarımmüstəvini özünə keçirən.

**242.** Aşağıdakı inikasları yerinə yetirən tam xətti çevirmələri tapın. 1) $0<x<1$ zolağını özünə inikas etdirən; 2) $-2<y<1$ zolağını özünə inikas etdirən; 3) $y=x$ və $y=x-1$ düz xətləri ilə məhdudlaşmış zolağı özünə inikas etdirən.

**243.** $w=\frac{1}{z}$ funksiyası üçün aşağıdakı xətlərin:

1) $x^2+y^2=ax$ çevrələr ailəsinin; 2) $x^2+y^2=by$ çevrələr ailəsinin; 3) $y=x+b$ paralel düz xətlər dəstəsinin; 4) $y=kx$ düz xətlər dəstəsinin; 5) verilmiş $z_0\neq 0$ nöqtəsindən keçən düz xətlər dəstəsinin; 6) $y=x^2$ parabolasının obrazlarını tapın.

**244.** Aşağıdakı inikasların verilmiş oblastları hansı çoxluğa inikas etdirdiyini tapın.

1) $w=\frac{z-i}{z+i}$ inikası $x>0, y>0$ kvadrantını; 2) $w=\frac{2z-i}{2+iz}$ inikası $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ yarımdairəsini; 3) $w=\frac{z}{z-1}$ inikası $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ bucağını; 4) $w=\frac{z-1}{z}$ inikası $0<x<1$ zolağını; 5) $w=\frac{z-1}{z-2}$ inikası $0<x<1$ zolağını; 6) $w=\frac{z}{z-1}$ inikası $1<|z|<2$ halqasını.

**245.** a) $-1, i, 1+i$ nöqtələrini uyğun olaraq 1) $0, 2i, 1-i$; 2) $i, \infty, 1$ nöqtələrinə çevirən kəsr-xətti çevirməni tapın.

b) $-1, \infty, i$ nöqtələrini uyğun olaraq 1) $i, 1, 1+i$; 2) $\infty, i, 1$; 3) $0, \infty, 1$ nöqtələrinə çevirən kəsr-xətti çevirməni tapın.

**246.** Aşağıdakı şərtləri ödəyən kəsr-xətti çevirmələri tapın.

1) 1 və $i$ nöqtələri tərpənməz, 0 nöqtəsi isə -1 nöqtəsinə keçir;

2) $\frac{1}{2}$ və 2 nöqtələri tərpənməz, $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ nöqtəsi isə $\infty$ nöqtəsinə keçir;

3) $i$ nöqtəsi ikiqat tərpənməz, 1 nöqtəsi isə $\infty$ nöqtəsinə keçir;

4) $-1,0,1$ nöqtələri uyğun olaraq $1,i,-1$ nöqtələrinə keçir.

**247.** Aşağıdakı inikasları yerinə yetirən kəsr- xətti çevirmələri tapın.

1)yuxarı yarımmüstəvini özünə inikas etdirən; 2)yuxarı yarımmüstəvini aşağı yarımmüstəviyə inikas etdirən; 3) yuxarı yarımmüstəvini sağ yarımmüstəviyə inikas etdirən.

**248.** $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ Jukovski funksiyası vasitəsilə $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ polyar şəbəkənin çevirməsini tapın.

**249.** $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ Jukovski funksiyasının aşağıdakı çoxluqları hansı çoxluqlara inikas etdirdiyini tapın.

1) $|z|<R<1$; 2) $|z|>R>1$; 3) $|z|<1$; 4) $|z|>1$; 5) $\operatorname{Im} z>0$; 6) $\operatorname{Im} z<0$; 7) $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; 8) $|z|<1$, $\operatorname{Im} z<0$; 9) $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$; 10) $1<|z|<R$, $\operatorname{Im} z>0$; 11) $R<|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; 12) $\frac{1}{R}<|z|<R$, $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re} z>0$; 13) $\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{\pi}{2}+\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

**250.** Verilmiş inikasda verilmiş çoxluqların obrazlarını tapın.

1) $w=iz+1-2i$: a) $\operatorname{Re} z=1$; b) $\operatorname{Im} z=1$; v) $D:\begin{cases}\operatorname{Re} z>1\\ \operatorname{Im} z>1\end{cases}$

2) $w=e^{\frac{\pi i}{4}}2z+2$: $\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z=0$;

3) $w=2z+1-i$; $|z|<1$;

4) $w=\frac{2}{z}$: a) $|z-1|<1$; b) $|z-1|<\sqrt{3}$; v) $1<|z-1|<\sqrt{3}$;

5) $w=\frac{z}{z-1}$: a) $\operatorname{Im} z=0$; b) $\operatorname{Im} z=1$; v) $0<\operatorname{Re} z<1$; q) $0<\operatorname{Im} z<1$;

6) $w=\frac{iz}{3i-z}$: a) $|z|=3$; b) xəyali ox.

## CAVABLAR VƏ GÖSTƏRİŞLƏR

**1.** 1)3; 2)1; 3)7; 4)$\sqrt{2}$; 5)1; 6)7; 7)$\sqrt{11}$; 8)1; **2.** 1)$\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 2)$\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 3)$\pi+2\pi k$, $k\in Z$; 4)$2\pi k$, $k\in Z$; 5)$-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 6)$-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.** 1)$z_1+z_2=3+7i$, $z_1\cdot z_2=-22+7i$; 2)$z_1+z_2=2-4i$, $z_1\cdot z_2=-1{,}81-5{,}2i$; 3)$z_1+z_2=-8-10i$, $z_1\cdot z_2=21-24i$; 4)$z_1+z_2=10$, $z_1\cdot z_2=28$; 5) $z_1+z_2=8$, $z_1\cdot z_2=19-4i$. **4.** 1) 3, $\frac{\pi}{2}$; 2) 2, $\pi$; 3) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$; 5)$\sqrt{29}$, $arctg\frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{29}$, $-arctg\frac{5}{2}$; 7) $\sqrt{29}$, $\pi-arctg\frac{5}{2}$; 8) $\sqrt{29}$, $arctg\frac{5}{2}-\pi$; 9) $|b|$, $\frac{\pi}{2}\frac{|b|}{b}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$; 10)$\sqrt{a^2+b^2}$, $a>0$ olduqda $arctg\frac{b}{a}$; $a<0$ və $b\geq 0$ olduqda $arctg\frac{b}{a}+\pi$; $a<0$ və $b<0$ olduqda $arctg\frac{b}{a}-\pi$. **5.** 1)$z_2-z_1=-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=-i$; 2)$z_2-z_1=4-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=1-2i$; 3)$z_2-z_1=1-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{3})i$, $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}$; 4)$z_2-z_1=2\sqrt{b}i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$; 5)$z_2-z_1=-2-4i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{19}{29}-\frac{16}{29}i$; 2)$z_2-z_1=4+3i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$. **6.** 1) $-i$; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{5}(1+3i)$; 4) $-8$; 5)$\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$; 6)0; 7) $-2i$; 8)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 9)0; 10)$-\frac{41}{50}+\frac{63}{50}i$; 11)$\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$; 12) $38+41i$; 13)$-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}i$. **7.** a) $\frac{13}{5}-\frac{1}{5}i$; b)$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$; v) $-1+i\sqrt{10}$; q)$\frac{14}{5}i$; d) $\frac{2}{5}$; e)$-\frac{24+7i}{25}$. **8.** 1)-2; 2)0.

**9.** 1) 0; 2) $-\frac{11}{17}$. **10.** $\operatorname{Re} z_1 = 3, \operatorname{Im} z_1 = -2$; $\operatorname{Re} z_2 = 5, \operatorname{Im} z_2 = 0$;

$\operatorname{Re} z_3 = 0, \operatorname{Im} z_3 = -3$; $\operatorname{Re} z_4 = 1, \operatorname{Im} z_4 = 1$. **12.** 1) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

2) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; 3) $\cos 0 + i\sin 0$; 4) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

5) $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$;

7) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; 8) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

9) $z = 5\left(\cos arctg\frac{4}{3} + i\sin arctg\frac{4}{3}\right)$; 10) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$;

11) $z = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{11\pi}{20} + i\sin\frac{11\pi}{20}\right)$. **13.** 1) $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$;

2) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$; 3) $z = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$;

4) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$; 5) $z = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

**14.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{16} + i\frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) 1; 3) $\cos 50^0 + i\sin 50^0$; 4) $\frac{1}{64} - \frac{\sqrt{3}}{64}i$; 5) -2; 6) 2;

7) $z = -\sqrt{2}$; 8) $z = -2^7 i$. **15.** 1) $e^2\cos 1 - ie^2\sin 1$; 2) $i$;

3) $-e^7\sin 3 + ie^7\cos 3$. **16.** 1) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$; 2) $4e^{i\frac{6\pi}{7}}$. **17.** 1) $e^{2\pi i} = 1$;

2) $8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$; 3) $64e^{\pi i} = -64$; 4) $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $2^7 e^{\frac{3\pi i}{2}} = -2^7 i$. **18.** 1) $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2e^{\frac{2\pi}{9}}, 2e^{\frac{8\pi}{9}}, 2e^{\frac{14\pi}{9}}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} + i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}, -\sqrt[4]{\frac{9}{8}} + i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{8}} - i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}, \sqrt[4]{\frac{9}{8}} - i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$. **19.** 1) 1;

$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-i$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;

4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$, $\pm\sqrt{2}i$; 5) $\pm1\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 6) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$; 7) $\pm(2+i)$; 8) $(k=0,1,2)$;

9), $(k=0,1,2,3,4)$. **20.** 1) $-1-i$; 2) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) -2, $1\pm\sqrt{3}i$;

4) $\pm2$, $\pm i$; 5) $2-\frac{3}{2}i$; 6) 0, $3i$, $-3i$; 7) $bi$, $b\in R$;

8) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; 9) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$,

$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$,

$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$; 10) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$,

$\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$,

$\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; 11) $\sqrt{3}+i$, $2i$,

$-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$. **21.** a) $x^2-2x+4=0$;

b) $x^2-(2+5i)x-6+4i=0$. **22.** a) $x^2+20x+200=0$;

b) $5x^2+14x+13=0$. **23.** a) $x=1\pm2i$; b) $x=\sqrt{3}\pm i$;

v) $z=\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k$, $\varphi_k=\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$; $z=0$.

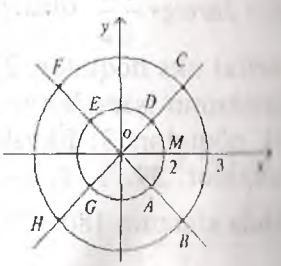
**24.** a) $z=1-i$; b) $z_1=5+i$, $z_2=3+2i$; v) $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-i$; q)

$z_1=1$, $z_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$, $z_{4,5}=\frac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$; d) $z_1=1+i$,

$z_2=-\frac{1}{5}(6+3i)$; e) $z=\frac{3}{4}+i$; i) $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **25.** $-1$. **26.** a) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$; b) $\sqrt{3}+i$, $-1+i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}-i$, $1-i\sqrt{3}$. **27.** a) $z = 6+17i$, $z = 6+8i$; b) $z_1 = 1+\frac{9}{5}i$, $z_2 = -1-\frac{6}{5}i$; v) $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1+i$. **28.** (3;4), (3;5), (4;4), (4;5). **29.** (-2;-2), (-2;2). **30.** 1) $x^2+4=0$; 2) $x^2-2x+10=0$; 3) $x^2+8x+18=0$. **31.** 1) $x=2$, $y=3$; 2) $x=-4\pm\sqrt{15}$, $y=1$; **32.** 1) $x=\sqrt{e}$, $y=e\sqrt{e}$; 2) $x_1 = k\pi+\frac{\pi}{4}$, $y_1 = k\pi-\frac{\pi}{4}$, $x_2 = k\pi-\frac{\pi}{4}$, $y_2 = k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$. **33.** 1) $x=1$, $y=-4$ və ya $x=-1$, $y=-4$; 2) $x=-2$, $y=-2$ və ya $x=-2$, $y=2$; **34.** a) $2i|z|^2+(2i-1)z+(2i+1)\bar{z}=2i$; b) $z^2-\bar{z}^2+2(1+i)z-2(1-i)\bar{z}=8i$. **Göstəriş:** $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ düsturlarından istifadə edin. **35.** $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{1}{2}\right)$ - bütün nöqtələr ekvator üzərində yerləşir. Uzunluq dairəsi isə uyğun olaraq $0$, $\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ ədədləridir. **36.** Mərkəzi $z=0$ nöqtəsində və radiusu $tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ olan çevrə. «Cənub» polyusa koordinat başlanğıcı, «Şimal» polyusa isə –sonsuz uzaqlaşmış nöqtə uyğundur. **37.** a) Uzunluq dairəsi $\alpha$ olan yarımmeridian; b) En dairəsi $\beta = 2arctgr - \frac{\pi}{2}$ olan paralellər. **38.** 1) Eyni paralel üzərində diametral əks nöqtələr; 2) Başlanğıc meridiana (başqa sözlə, uzunluq dairəsinin işarəsinə nəzərən fərqlənən) nəzərən qarşılıqlı simmetrik nöqtələr; 3) Ekvator müstəvisinə nəzərən qarşılıqlı simmetrik nöqtələr. **39.** $z_1 \cdot \bar{z}_2 = -1$. **41.** Həqiqi oxa paralel olan diametr ətrafında sferanın $180^0$ dönməsi zamanı. **42.** 1)Şərq yarımkürə; 2)Qərb

yarımkürə; 3) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ -yarımkürəsi ($\alpha$ -uzunluq dairəsidir); 4) $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$ -yarımkürəsi; 5) Cənub yarımkürə; 6)Şimal yarımkürə. **43.** 1) $y = x$ düz xətti; 2) $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ parabolası; 3) $y = 0$ şüası, $x \geq 0$; 4) $x^2 + y^2 = 9$ çevrəsi; 5) $x^2 + y^2 = 4$ çevrəsi ilə $4x + y\sqrt{2} + 7 = 0$ düz xəttinin kəsişmə nöqtələri: $x = -\frac{26 \pm \sqrt{46}}{18}$, $x = \frac{-7\sqrt{2} \pm 4\sqrt{23}}{18}$; 6) $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ nöqtəsi. **44.** 1) mərkəzi $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ nöqtəsində və radiusu $\frac{4}{3}$ olan çevrə; 2) $x = \frac{3}{8}$ düz xəttindən sola yerləşən müstəvi hissəsi; 3) mərkəzi (1;0) nöqtəsində və radiusu 10 olan çevrənin xarici; 4) $x^2 + y^2 = 25$ dairəsinin daxili; 5)mərkəzi $z = z_0$ nöqtəsində və radiusu R olan dairənin daxili; 6) mərkəzi $z = z_0$ nöqtəsində və radiusu R olan dairənin xarici; 7) mərkəzi $z = z_0$ nöqtəsində və radiusu R olan çevrə; 8)fokusları $z = \pm 2$ nöqtələrində və böyük yarımoxu $\frac{5}{2}$ olan ellips; 9) $x = C$ düz xətti və ondan sağda yerləşən yarımmüstəvi; 10) $y = C$ düz xəttindən aşağıda yerləşən yarımmüstəvi; 11) $-1 < y < 0$ zolağı; 12) $x + y = 1$ düz xətti ilə məhdudlaşmış və koordinat başlanğıcını özündə saxlayan yarımmüstəvi; 13) $z_1$ və $z_2$ nöqtələrindən keçən düz xətt üzərində yerləşən və $z_2$-dən fərqli nöqtələr çoxluğu; 14) diametri $z_1$ və $z_2$ nöqtələrindən keçən və $z_2$-dən fərqli nöqtələr çoxluğu olan çevrə; 15) $|z - i| = \sqrt{2}$ və $|z + i| = \sqrt{2}$ çevrələrinin ümumi hissəsindən başqa qalan daxili hissəsi. **45.** a) 3), 5), 6); b) 2), 8), 9). **46.** 1) $\operatorname{Re} z = -1$ ($x = -1$) düz xətti; 2) mərkəzi $z_0(2;-1)$ nöqtəsində və radiusu $R = 2$ olan dairənin xarici; 3)



Şəkil 58.

$\mathrm{Re}\, z > -3$ sağ yarımmüstəvi; 4) $DC$ parçası (şəkil 58); 5) $AD$ qövsü (şəkil 58). **47.** 1) $x = 1$, $-2 \le y \le 0$ düz xətt parçası; 2) $y = x^2$ parabolası; 3) $y = x^2$ parabolasınının iki dəfə dolanmaqla sağ tərəfi; 4) mərkəzi $z = 0$ nöqtəsində və radiusu $a$ olan çevrənin sol yarımhissəsi; 5) $y = \frac{1}{x}$ parabolasının üçüncü kvadranta yerləşən qanadı; 6) mərkəzi $z = 0$ nöqtəsində və radiusu 1 olan çevrənin yuxarı yarımhissəsi; 7) mərkəzi $z = 0$ nöqtəsində və radiusu 1 olan çevrənin birinci kvadranta yerləşən yarımhissəsi; 8) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidi; 9) $x = at - b\sin t$, $y = a - b\cos t$ siklodinin birinci uzun ($a < b$), qısa ($a > b$) və ya ($a = b$) qövsü; **48.** 1) 1; 2) $\cos 1 + i\sin 1$; 3) -1; 4) $1 + 2i$; 5) $2i$; 6) 0; 7) $1 + ie$. **49.** 1) -12; 2) $4 + 4i$. **50.** 1) $xy = -1$ hiperbola; 2) $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ çevrəsi;

3) $\frac{16\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{9} - \frac{2x^2}{9} = 1$-hiperbola; 4) $\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$-ellips;

5) $x^2 + y^2 = 1$-çevrə; 6) $[z_1; z_2]$ parçasına perpendikulyar və onun ortasından keçən düz xətt; 7) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$-hiperbola;

8) $y^2 = 2x + 1$-parabola. **51.** 1) a) $1 + 4i$; b) $4 + 9i$; 2) a) $\frac{1}{2}(1 + i)$;

b) $\frac{1}{13}(3 - 2i)$; 3) $i$; 4) $-18 + 5i\sqrt{3}$. **52.** a) $-e^{-i}$; b) $ei$;

v) $e^{\cos(\sin 1)}(\cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1))$; q) $\cos e + i\sin e$.

**53.** 1) $f(2i) = e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; 2) $f(-i) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; 3) $-e^3\sin 2$;

4) $\sin 1 \cdot \mathrm{ch}\, 1$; 5) $\ln 3$; 6) 1. **54.** 1) $u = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$, $v = e^{x^2 - y^2}\sin 2xy$;

2) $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v = e^x(y\cos y + x\sin y)$;

3) $u = \frac{1}{2}\left[(x^2 - y^2)(e^{-y} + e^y)\cos x - 2xy(e^{-y} - e^y)\sin x\right]$,

$v=\frac{1}{2}\left[(x^2-y^2)(e^{-y}-e^{y})(\sin x+2xy(e^{-y}+e^{y})\cos x\right];$

4) $u=2\sin 2x\left(2\cos 2x+e^{-2y}+e^{2y}\right)^{-1}$,

$v=\left(e^{-2y}-e^{2y}\right)\left(2\cos 2x+e^{-2y}+e^{2y}\right)^{-1}$. **55.** 1) $\frac{2\sin 2+i\left(e^{2}-e^{-2}\right)}{2\cos 2+e^{2}+e^{-2}}$;

2) $\frac{1}{2}\left[(e+e^{-1})\cos 2+i(e-e^{-1})\sin 2\right]$; 3) $\frac{e^{4}-e^{-4}-i\sin 2}{e^{4}+e^{-4}-\cos 2}$; 4) $\frac{40+9i}{41}$.

**56.** 1) $\cos 2ch1-i\sin 2sh1$; 2) $ish2$; 3) $\frac{\sin 4-ish2}{2(\cos^2 2+sh1)}$; 4) $\frac{8+15i}{17}$;

5) $\frac{sh4-i\sin 2}{ch4-\cos 2}$; 6) $\frac{40+9i}{41}$. **57.** 1) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+y$,

$\operatorname{Im} f(z)=2xy+x$; 2) $\operatorname{Re} f(z)=\frac{x}{x^2+(y-2)^2}$, $\operatorname{Im} f(z)=\frac{2-y}{x^2+(y-2)^2}$.

**58.** 1) $\ln 4+2ki\pi$, $(2k+1)i\pi$, $i\pi$; 2) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)i\pi$, $\frac{i\pi}{2}$; 3) $\left(2k\pm\frac{1}{4}\right)i\pi$;

4) $\frac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-arctg\frac{3}{2}\right)i$, $\frac{1}{2}\ln 13+\left((2k+1)\pi-arctg\frac{3}{2}\right)i$;

5) $\ln 2+i\left(2\pi k+\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$; 7) $1+i\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $i(2\pi k+\alpha)$.

**59.** 1) $z=\frac{1+2iw}{w}$; 2) $z=\frac{3(1+iw)}{w-2}$. **60.** 1) $f(z_0)=1$;

2) $f(z_0)=\frac{1}{5}(1+3i)$; 3) $f(z_0)=-5-3i$; 4) $f(z_0)=\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i$; **61.** 1) həqiqi oxun obrazı həqiqi ox, xəyali oxun obrazı isə xəyali oxdur; 2)həqiqi oxun obrazı xəyali ox, xəyali oxun obrazı isə həqiqi oxdur; 3) həqiqi oxun obrazı $\left|w-\frac{1}{2}+i\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ çevrəsi, xəyali oxun obrazı isə $2u-v=2$ düz xəttidir. **62.** 1) $z=1$ budaqlanma nöqtəsi, $z=-i$ isə budaqlanm nöqtəsi deyil. **63.** 1) $\sin 2$, $-\pi+\frac{1}{2}$; 2) $sh1$, $1-\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{e}{3}$, $\pi+1$. **64.** 1) $2\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}+2$; 2)2; 2. **65.** 1) $y+2(x^2-y^2)$;

2) $-y-\frac{y}{x^2+y^2}$. **66.** 1), 2) ancaq $z_0=0$ nöqtəsində diferensiallanandır; 3), 4) heç bir nöqtədə diferensiallanan deyil. **67.** 1) Koşi-Riman şərtləri ödənir: $u_x=v_y=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $u_y=-v_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;
2) $u_x=2x$, $v_y=-2$, $u_y-v_x=0$ olduğundan Koşi-Riman şərtləri $x=-1$ düz xətti üzərində ödənir. **68.** $f'(z)=3z^2$.
**69.** 1) $f'(-1+i)=-6$; 2) $f'(i)=-2ei$; 3) $f'(-1+\pi i)=-\frac{\pi i}{e}$;
4) $f'(1)=-2(1+i)$. **70.** 1) $v(x,y)=2xy+2y+c$, $f(z)=z^2+2z+ci$;
2) $v(x,y)=2xy-y+c$, $f(z)=z^2-z+ci$;
3) $v(x,y)=2xy-x+5y-\frac{x}{x^2+y^2}+c$, $f(z)=z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}+ci$;
4) $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+3x^2y-y^3+x+2\cos x\operatorname{ch}y+c$,
$f(z)=ze^z+2i\cos z+z^3-iz+ci$. **71.** 1) $u(x,y)=x-y+c$,
$f(z)=(1+i)z+c$; 2) $u(x,y)=-2arctg\frac{y}{x}-y-2x+c$,
$f(z)=2i\ln z+iz-2z+c$; 3) $u(x,y)=-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+c$,
$f(z)=\frac{1}{2z}+iz^2+3i+c$. **72.** 1) $u(x,y)=3x^2y+6xy^2-2x^3-y^3$,
$f(z)=(1-2i)z^3$; 2) $u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}$, $f(z)=\frac{z-2}{2z}$;
3) $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}-2+2x$, $f(z)=\frac{1}{z}+2iz-1-2i$;
4) $u=e^x(x\cos y+y\sin y)+x-y+1$, $f(z)=ze^z+(1+i)z+1$;
5) $v=2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$, $f(z)=(1-\frac{i}{2})z^2$; 6) $v=2^x\sin(y\ln 2)-i$,
$f(z)=2^z+1$; 7) $v(x,y)=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$, $f(z)=\frac{i}{z+1}$;
8) 1) $v(x,y)=x^3-3xy^2+y$, $f(z)=z+iz^3$. **73.** Koşi-Riman şərtləri ixtiyari nöqtədə ödənir: 1) $f'(z)=3e^{2z}(1+2z)$; 2) $f'(z)=-\sin(z+2i)$.

**74.** Koşi-Riman şərtləri ixtiyari nöqtədə ödənir: 1) $f(z)=\frac{1}{z^2}+c$;

2) $f(z)=z\cdot e^{iz}+c$; 3) $f(z)=iz+\frac{i}{z}+c$; 4) $f(z)=iz\cdot e^{iz}+c$;

5) $f(z)=z+\frac{1}{z}+c$; 6) $f(z)=z\sin z+c$. **75.** 1) $\pm e^{-y}(x\sin x+y\cos x)+c$;

2) $\pm\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+c$; 3) $\pm\left(y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)+c$; 4) $\pm\left(x+\frac{y}{x^2+y^2}\right)+c$.

**76.** 1) $c=1, b=-a$; $f(z)=(1-ai)z$; 2) $a=b=-1$; $f(z)=e^{iz}$. **77.** Funksiya $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$, $\pi<\arg z<\frac{5\pi}{4}$ olduqda analitikdir ($f(z)=z^2$) və $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{7\pi}{4}$ olduqda analitikdir ($f(z)=-z^2$).

**78.** 1)var; 2) var; 3) yoxdur. **79.** 1) $f(z)=e^{i\alpha}z^2e^{z^2}$; 2) $f(z)=e^{i\alpha}e^{z^2}$;

3) $f(z)=Ae^{z^2}$; 4) $f(z)=Aze^{z^2}$ ($\alpha$ – ixtiyari həqiqi, $A$ – isə ixtiyari müsbət sabitdir). **80.** 1) $\frac{1}{e}-1$; 2) $\frac{1}{e}(2+\pi i)$; 3) $\frac{2}{3}(-1+i)$;

4) $(1-\cos 1-\sin 1)+i(\cos 1-\sin 1)$; 5) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i$; 6) $1+\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$;

7) $-9i$. **81.** 1) $1+0{,}5i$; 2) $2\pi i$; 3) $2(i-1)$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) 0; 6) $2i$;

7)a) $4\pi i$; b) 0; v) $10\pi i$; 8) a) $i$; b) $0{,}5(-1+i)$; v) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2})$;

9)a) 0; b) $-16\pi$; v) $\pi i$; 10) $-\pi i$; 11) $0{,}5+i$; 12)0; 13) $4\pi i$.

**82.** a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$. **83.** a) $2\pi i$; b) $\frac{\pi}{2}i$. **84.** a) $-2\pi i$; b) 0; v) $\pi i$;

q) $\pi\left(\frac{24}{5}-\frac{106}{25}i\right)$; d) $-\frac{\pi i}{2}$; e) $2\pi i$. **85.** 1)a) və b) halında $-\frac{\pi abl}{16}$;

2)a)0; b) $\frac{2\pi e^{-2}}{25}(4+3i)$; v) $\frac{2\pi i(1+i)}{(2+i)^2}e^i$; q) $\frac{2\pi i}{(2+i)^2}(e^{-2}+e^i(1+i))$.

3) $\frac{4}{3}i$; 4) 0; 5) $-i(e^{\pi}+1)$; 6)a) $2+i$; b) $\frac{\pi i}{2}$. 7) a) 0; b) $\pi i \cdot e^{-1}$.

**86.**a) $I_1 = -\frac{1}{3}(1+i)$, $I_2 = 1+i$; b) $I_1 = -\frac{1}{3}(1+i)$, $I_2 = \frac{1}{3}(1+i)$.

87.a)0; b)0; v)0; q)0. **88.** 1) $I_1 = 2+i$, $I_2 = 1+\frac{i}{2}$; 2) $I_1 = \frac{i\pi}{2}$, $I_2 = -\frac{\pi}{2}$; 3) $I_1 = i\pi R^2$, $I_2 = -\pi R^2$. **89.** 1) $\sqrt{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4)0. **90.** $\pi i$. **91.** $\frac{4}{3}$. **92.** 1) $n \neq -1$ olduqda $\frac{R^{n+1}}{n+1}\left[(-1)^{n+1}-1\right]$, $n=-1$ olduqda $\pi i$; 2) və 3) $n \neq -1$ olduqda 0, $n=-1$ olduqda $2\pi i$. **93.** Əgər $C$ konturu 0 nöqtəsini öz daxilinə alırsa, 1 və -1 nöqtələrini isə almırsa, onda inteqral $-2\pi i$-dir; əgər $C$ konturu 1 və ya -1 nöqtələrindən ancaq birini öz daxilinə alırsa və 0 nöqtəsini isə almırsa, onda inteqral $\pi i$-dir. Deməli, inteqral aşağıdakı beş müxtəlif qiymətləri ala bilər: $-2\pi i; -\pi i; 0; \pi i; 2\pi i$. **94.** 1) $\frac{\pi i}{2}$; 2) $\frac{\sin a}{a}$; 3) $e^{\alpha}(1+\alpha/2)$. **95.** 1)1; 2) $-\frac{e}{2}$; 3) $-\frac{e}{2}$. **96.**1)a) $I_1 = -\frac{1}{3}(1+i)$, $I_2 = 1+i$; b) $I_1 = -\frac{1}{3}(1+i)$, $I_2 = \frac{1}{3}(1+i)$; 2) $-i(e^{\pi}+1)$; 3) $\frac{4}{3}i$; 4) 0. 97.1) 0; 2) $\pi e^{-1}$. **98.** 1)mütləq yığılır; 2)mütləq yığılır; 3)dağılır; 4)yığılır; 5) $\varphi \neq 2k\pi$ olduqda yığılır, $\varphi = 2k\pi$ olduqda isə dağılır; 6)yığılır; 7)dağılır; 8) dağılır; 9)mütləq yığılır; **99.** 1)dağılır; 2)mütləq yığılır; 3)dağılır; 4) şərti yığılır; 5)dağılır; 6) mütləq yığılır. **100.** a) 0; b) $\pi i$; v) 2; q) $\frac{1}{e}$. **101.** 1) $R=e$; 2) $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $R=\frac{1}{3}$ və $|z|=\frac{1}{3}$ yığılma dairəsi; 4) $R=\sqrt{3}$ və $|z|<\sqrt{3}$ yığılma dairəsi; 5) $R=\sqrt{3}$; 6) $R=1$; 7) $R=\sqrt{2}$; 8) $R=0$; 9) $R=1$; 10) $R=1$;

11) $R=\frac{1}{4}$; 12) $R=\frac{1}{e}$; 13) $R=\begin{cases}1, & |a|<1\\ \frac{1}{|a|}, & |a|>1\end{cases}$; 14) $R=\frac{1}{3}$; $|z-i|<\frac{1}{3}$;

15) $R=\sqrt{3}$; $|z|<\sqrt{3}$; 16) $R=\sqrt{2}$; 17) $R=1$; 18) $R=\sqrt{2}$; 19) $R=0$.

**102.** 1) $R=\infty$, bütün müstəvi; 2) $R=0$, $z=0$ nöqtəsi; 3) $R=\sqrt{2}$, $|z-i|<\sqrt{2}$. 4) $|z+i|<1$; 5) $|z|<1$; 6) $|z+1+i|<1$; 7) $|z|<\frac{1}{e}$; 8) $\operatorname{Re} z<-1$ yarımmüstəvisi; 9) həqiqi ox; 10) $z=0,\pm1,\pm2,...$ nöqtələrindən başqa bütün müstəvi; 11) $\frac{1}{2}<|z|<1$; 12) $|z|>1$; 13) $|z|<1$. 14) $|z|>1$; 15) $|z|<1$; 16) $|z|=1$ çevrəsindən başqa bütün müstəvi. 17) $|z+2i|<1$; 18) $|z|<\sqrt[3]{3}$; 19) $|z-i|<3$; 20) $|z|<1$; 21) $z\in E$ kompleks ədədlər çoxluğu; 22) $|z+i|<\sqrt{2}$; 23) $|z-i|>3$; 24) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<0$; 25) $|z+i|>1$; 26) $|z+i|>2$; 27) $z\in E$; 28) $\operatorname{Re} z<-\ln 2$; 29) $2<|z+1|<3$; 30) $\frac{1}{3}<|z+1|<\frac{1}{2}$; 31) $|z+1-i|<2$; 32) $\left|z-\frac{5}{2}-\frac{i}{4}\right|<\frac{5}{4}$.

33) $|z-i|<\frac{1}{3}$; 34) $z=-i$ nöqtəsindən başqa bütün müstəvi; 35) $2<|z|<3$; 36) $|z-2i|<|z+i|$. **103.** 1) $R=e$; 2) $R=1$; 3) $R=1$;

4) $R=\frac{1}{4}$; 5) $R=\frac{1}{e}$; 6) $R=\begin{cases}1, & |a|<1\\ \frac{1}{|a|}, & |a|>1\end{cases}$; 7) $R=\frac{1}{3}$; $|z-i|<\frac{1}{3}$;

8) $R=\sqrt{3}$; $|z|<\sqrt{3}$; 9) $R=\sqrt{2}$; 10) $R=1$; 11) $R=\sqrt{2}$; 12) $R=0$.

**104.** 1) $R$; 2) $\frac{R}{2}$; 3) $\infty$; 4) 0; 5) $R^k$; 6) $|z_0|\le 1$ olduqda $R$, $|z_0|>1$ olduqda isə $\frac{R}{|z_0|}$. **105.** 1) $R\ge \min(r_1,r_2)$; 2) $R\ge r_1 r_2$; 3) $R\ge \frac{r_1}{r_2}$.

**106.** 1) bütün nöqtələrdə dağılır; 2) $z=1$ nöqtəsindən başqa hər yerdə yığılır (mütləq yox); 3) mütləq yığılır; 4) $z=-1$ nöqtəsindən

başqa hər yerdə yığılır (mütləq yox); 5) $z = e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ $(k = 0,1,\ldots,p-1)$ nöqtəsindən başqa hər yerdə yığılır (mütləq yox); 6) $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ və $z = -1$ nöqtəsindən başqa hər yerdə yığılır (mütləq yox); 7)mütləq yığılır. **107.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; 4) $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$;

5) $a^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{z}{a}\right)^n$, burada $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$,

$n = 1,2,\ldots$, $R = |a|$; 6) $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{z}{i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \left(\frac{z}{i}\right)^n\right]$,

$R = 1$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = \left|\frac{b}{a}\right|$; 8) 1) $\frac{i}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n} z^n$,

$R = 1$; 9) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n$, $R = 1$; 10) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$;

11) $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \frac{z^n}{n}$, $R = 1$. **108.** 1) $\frac{z}{(1-z)^2}$; 2) $-\ln(1-z)$;

3) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$; 4) $\frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$; 5) $\frac{1}{2-z}$, $|z| < 2$; 6) $\frac{z}{1-z}$; $|z| < 1$;

7) $\frac{3z}{(3-z)^2}$; 8) $\frac{z^2}{(1-z^2)^2}$; 9) $\frac{z}{(z-1)^2}$. **109.** 1) $|z-i| < \frac{1}{3}$; 2) $z = i$ nöqtəsindən başqa kompleks müstəvinin bütün nöqtələri. **111.** $f(z) = i + 5(z-i) - 10i(z-i)^2 - 10(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$.

**112.** a) $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$, $|z-1| < 1$; b) $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n+1)!}$, $|z| < \infty$;

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+2}$, $|z| < \infty$. **113.** a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = \left|\frac{b}{a}\right|$;

b) $\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}[(2-3i)^n-(2+3i)^n]\frac{z^n}{13^n}$, $R=\sqrt{13}$; v) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n$, $R=1$.

**114.** a) $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n})\frac{z^n}{n}$, $R=1$; b) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$;

v) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $R=\infty$. **115.** a) $\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^n+1}$, $R=3$;

b) $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1})}}$, $R=2$; v) $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $R=2$.

**116.** a) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-2)^n}{n2^n}$, $R=2$.

**117.** a) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}}+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)z^n$, $|z|<\sqrt{2}$;

b) $\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(6n+5+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)z^n$, $|z|<1$; v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n}$, $|z|<2$;

q) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}z^{2n+1}$, $|z|<1$. **118.** $f(z)=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$.

**119.** $f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2$.

**120.** a) $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{4^n}$; b) $f(z)=\frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^{2n}$, $n<0$

olduqda $a_n=1$, $n>0$ olduqda $a_n=\frac{3n+7}{4^{n+2}}$;

v) $f(z)=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}[1+(3n-7)4^{n-2}]z^{-2n}$. **121.** 1) $\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$,

$|z-1|<1$; 2) $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$, $|z|<1$;

3) $\sin z=\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^{2n}}{(2n)!}+\cos 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

4) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2(z-2)^n}{n!}$, $R=\infty$; 5) $\ln(1+z)=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3n}(z-2)^n$,

$|z-2|<3$. **122.** 1) $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4}\left((-1)^{n+1}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right)z^n$;

2) $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+3}}\left((-1)^{n+1}-5\right)\cdot(z-1)^n$.

**123.** 1) $\dfrac{1}{3}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, $R=3$;

2) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}\right]$, $R=2$;

3) $\dfrac{1}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $R=2$; 4) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}(z-1)^n$,

$R=1$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-1)^n}{n}$, $R=1$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(1+\pi n/2)}{n!}(z-1)^{2n}$,

$R=\infty$. **124.** 1) $1+z^2+\dfrac{z^4}{3}+\ldots$; 2) $1-\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^4}{96}+\ldots$;

3) $1+z^2-\dfrac{1}{2}z^3+\dfrac{5}{6}z^4-\dfrac{3}{4}z^5+\ldots$;

4) $1+z+z^2+\dfrac{5}{6}z^3-\dfrac{5}{8}z^4+\dfrac{13}{30}z^5+\ldots$; 5) $z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{2z^3}{3!}+\dfrac{9z^5}{5!}+\ldots$.

**125.** 1) $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$; 2) $\dfrac{z^2}{z-1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n+2}$, $|z|<1$;

3) $ch3z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$; 4) $e^{z+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^2 z^n}{n!}$, $R=\infty$;

5) $\sin^2 z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$, $R=\infty$; 6) $\dfrac{1}{1-az}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n z^n$, $|z|<\dfrac{1}{|a|}=R$;

7) $\dfrac{1}{a-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{a^{n+1}}$, $|z|<|a|=R$; 8) $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$, $|z|<1$;

9) $\dfrac{2z-1}{z+2}=5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}z^n}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2}$, $|z|<2$;

10) $\frac{z^2-z+3}{z+2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}z+9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$, $|z|<2$;

11) $\frac{2}{z^2-2z+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}}+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)z^n$, $|z|<\sqrt{2}$;

12) $\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(6n+5+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)z^n$, $|z|<1$;

13) $\frac{4}{4+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n}$, $|z|<2$; 14) $\frac{z}{z^2-i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}z^{2n+1}$, $|z|<1$.

**126.** 1) $|z|<2$ olduqda $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$; $|z|>2$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$;

2) $|z|<|a|$ olduqda $\frac{(-1)^k}{a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{z}{a}\right)^n$; $|z|>|a|$ olduqda

$\frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{a}{z}\right)^n$; 3) $|z|<1$ olduqda $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$; $0<|z-1|<1$

olduqda $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$; $|z|>1$ olduqda $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$;

4) $|z|<|a|$ olduqda $\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+1}a^{n+1}}z^n$; $0<|z-a|<|b-a|$ oldu-

qda $\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right]$, $|z|>|a|$ olduqda

$\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$, $|a|<|z|<|b|$ olduqda $\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{b^{n+1}}+\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)$;

5) $0<|z-2|<\sqrt{5}$ olduqda

$\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$,

$1<|z|<2$ olduqda $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$;

6) $0<|z-i|<2$ olduqda

$$-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n(z-i)^n}{2^{n+4}},$$

$|z|>1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$;

7) $|z|>|b|$ olduqda $\pm\left[z-\frac{1}{2}(a+b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\right]$,

$$c_{-(n-1)}=(-1)^n\left[\binom{\frac{1}{2}}{n}b^n+\binom{\frac{1}{2}}{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{1}b^{n-1}a+\binom{\frac{1}{2}}{n-2}\binom{\frac{1}{2}}{2}b^{n-2}a^2+\ldots+\binom{\frac{1}{2}}{n}a^n\right];$$

$|z|>1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, burada

$$c_{-n}=\frac{(-1)^n i}{\sqrt{2}}\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n+m}\binom{-\frac{1}{2}}{m}2^{-m}\right],\quad c_n=2^{-n}c_{-n},\quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$c_0=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 2^{-m}\right];$$

9) $0<|z|<\infty$ olduqda $\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2!)z^n}$; 10) $0<|z-1|<\infty$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(z-1)^n}$; $|z|>1$ olduqda $1-\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, burada $c_{-n}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\binom{n-1}{k}$, $n=1,2,3,\ldots$; 11) $0<|z-2|<\infty$ olduqda

$$\cos 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}4^{2k-1}\sin 1}{(2k-1)!(z-2)^{4k-2}}+\frac{(-1)^k4^{2k}\cos 1}{(2k)!(z-2)^{4k}}\right];$$

12) $0<|z-1|<\infty$ olduqda

$$(z-1)+2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}\left[1/(2k-1)!+1/(2k+1)!\right]}{(z-1)^{2k-1}}+\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!(z-1)^{2k}}\right];$$

13) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$, burada $c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$;

14) $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}$, burada

$c_{2n} = c_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$;

15) $0 < |z-1| < \infty$ olduqda $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}$; $|z| > 1$ olduqda

$-\sin 1 - \frac{\cos 1}{z} + \frac{\sin 1 - 2\cos 1}{2!z^2} + \frac{6\sin 1 - 5\cos 1}{3!z^3} + \ldots$. **127.** 1) bəli; 2)bəli; 3) xeyr, $z = 1$ nöqtəsi izolə edilmiş məxsusi nöqtə deyil; 4)xeyr; 5) xeyr; 6) xeyr; 7) xeyr; 8) xeyr, $z = 0$ nöqtəsini daxilinə alan istənilən halqada funksiya kəsilməz deyil; 9) xeyr; 10) bəli; 11) əgər, $\alpha$ – tam ədəddirsə, bəli, qalan hallarda xeyr. **128.** 1)xeyr; 2) bəli, hər iki budağın ayrılışı var; 3) xeyr; 4) bəli, hər üç budağın ayrılışı var; 5) xeyr; 6) iki budağın (dörd budaqdan) ayrılışı var; 7)xeyr; 8) xeyr; 9) xeyr; 10) bəli, hər bir altı budağın ayrılışı var; 11) xeyr. **129.** 1) a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n}\right) z^n$, $|z| < 1$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, $1 < |z| < 3$; v) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n 3^n - 1\right) \frac{1}{z^n}$,

$|z| > 3$; 2) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - 3(-1)^n}{2^n}\right) (z+1)^n$, $|z+1| < 2$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3^n+1)}{6^{n+1}} (z-3)^n$, $|z-3| < 2$;

3) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} (z-1)^n + \frac{1}{4} - \frac{1}{z-1}$, $0 < |z-1| < 4$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{4^{n+1}} + \frac{5}{4} - \frac{3}{z+3}$, $0 < |z+3| < 4$.

**130.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{2^{n+3}}(z+1)^n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}$, $0<|z-1|<4$.

**131.** 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{z^n}$, $|z|>1$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n(z+2i)^n$, $|z+2i|<1$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^n}{3^{n+1}}$, $|z|<3$. **132.** 1) a) $\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-1}$, $|z-i|<1$; b) $z^{-2}$, $|z|>0$; 2)a) $\frac{1}{z}-\frac{i}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}z^n$, $|z|<1$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}\left(n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-i)^n$, $|z-i|<1$; v) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^n}{z^{n+1}}$, $|z|>1$; q) $\frac{-1}{z+i}+\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}(-1)^n(n+2)(z+i)^n$, $0<|z+i|<1$. **133.** a) $z=k\pi$ nöqtələri funksiyanın sadə sıfırlarıdır; b) $z=1$ nöqtəsi dördüncü tərtib sıfırdır; v) $z=1$ nöqtəsi birinci tərtib polyusdur; q) $z=\pi$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir. **134.** a) $z=0$ iki tərtibli polyusdur, $z=k\pi$ nöqtələri funksiyanın 3 tərtibli polyuslarıdır; b) $z=2$ nöqtəsi birinci tərtib polyus, $z=1$ ikitərtibli polyusdur; v) $z=-1$ nöqtəsi sadə polyusdur, $z=2$ nöqtəsi üç tərtibli polyusdur. **135.** a) $z=1$ üç tərtibli polyusdur, $z=0$ və $z=-1$ bir tərtibli polyuslardır; b) $z=k\pi$ nöqtələri funksiyanın sadə polyuslardır; v) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ nöqtələri üç tərtibli polyuslardır; q) $z=2i$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir; d) $z=-i$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir. **136.** a) $z=1$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir, $z=2k\pi i$ nöqtələri bir tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ nöqtəsi aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir; b) $z=-1$, $z=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ bir tərtibli polyuslardır, $z=1$ iki tərtibli polyusdur, $z=0$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir; v) $z=\pi$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $z=\infty$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir; q) $\pm i$ nöqtələri sadə polyus, $\pm1$ nöqtələri iki tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir. **137.** a)düzgün nöqtə; b) düzgün nöqtə; v) 5 tərtibli polyus; q)sadə polyus; d) 3 tərtibli polyus; e) vacib məxsusi nöqtə. **138.**a) $z=-1$, $z=\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$ bir tərtibli polyuslardır (sadə polüyus),

$z=\infty$ üç tərtibli sıfırdır; b) $z=0$ nöqtəsi üç tərtibli polyus, $z=\infty$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir, v) $z=-1$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtə, $z=\infty$ üç tərtibli sıfırdır; q) $z=0$ sadə polyus, $\pm 2i$ nöqtələri iki tərtibli polyus, $z=\infty$ nöqtəsi vacib məxsusi nöqtədir. **139.**a) $\pm 1$, $\pm i$ bir tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ düzgün nöqtədir; b) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ sadə sıfırdır; v) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ düzgün nöqtədir. **140.** 1) üç tərtibli sıfır; 2)dörd tərtibli sıfır; 3)altı tərtibli sıfır; **141.** 1) $z_1=1$, $z_{2,3}=-1\pm i$ nöqtələri sadə polyusdur, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; 2) $z_k=(-\pi+2k\pi)i$ sadə polyus nöqtələridir; 3) $z=\pm i$ nöqtələri sadə polyusdur, $z=0$ və $z=-1$ vacib məxsusi nöqtələrdir; 4) $z_k=2k\pi i, k=\pm 1,...$ sadə polyus nöqtələridir, $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir; **142.** a) 0 və $\pm 1$ bir tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ düzgün nöqtədir; b) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$-sadə polyuslardır, $z=\infty$ düzgün nöqtədir; v) $z=1$ nöqtəsi üç tərtibli polyusdur, $z=\infty$ nöqtəsi 2 tərtibli polyusdur; q) $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; d) q) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ düzgün nöqtədir; e) $-0,75$ nöqtəsi sadə polyusdur, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir. **143.** $\pm 1$ bir tərtibli polyuslardır, $\pm i$ iki tərtibli polyuslardır. **144.** a) $z=\pm i$ bir tərtibli polyuslardır; b) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir. **145.** 1) $z=0$ bir tərtibli polyusdur, $z=\pm 2i$ - iki tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ düzgün nöqtədir (5 tərtibli sıfır); 2) $z=\pm i$-sadə polyuslardır, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; 3) $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; 4) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ bir tərtibli polyusdur; 5) $z=1$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ düzgün nöqtədir; 6) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir. 7) $z=0$ iki tərtibli polyusdur, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; 8) $z=1$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ düzgün nöqtədir (1 tərtibli sıfırdır); 9) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ düzgün nöqtədir(1 tərtibli sıfırdır); 10) $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir; 11) $z=0, z=\pm 1$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – düzgün nöqtədir (3 tərtibli sıfırdır);

12) $z=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}, z=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – düzgün nöqtədir; 13) $z=1$-ikitərtibli polyusdur, $z=\infty$ – üç tərtibli polyusdur; 14) $z=0$-birtərtibli polyusdur, $z=\pm 2$-iki tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – düzgün nöqtədir(5 tərtibli sıfırdır); 15) $z=\pm i$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 16) $z=\infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 17) $z=\infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 18) $z=2k\pi i$, $(k=\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 19) $z=0$-iki tərtibli polyusdur, $z=2k\pi i$, $(k=\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 20) $z=(2k+1)\pi i$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-bir tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 21) $z=0$-üç tərtibli polyusdur, $z=2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 22) $z=k\pi i$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 23) $z=0$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ – düzgün nöqtədir; 24) $z=0$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ – bir tərtibli polyusdur; 25) $z=1$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ – düzgün nöqtədir; 26) $z=0$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z=\infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 27) $z=1$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z=2k\pi i$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 28) $z=k\pi$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 29) $z=0$ – iki tərtibli polyusdur, $z=\infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 30) $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-bir tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 31) $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$-iki tərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 32) ) $z=0$ – üç tərtibli polyusdur, $z=k\pi$, $(k=\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 33) $z=k\pi$, $(k=\pm 1,\pm 2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z=\infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir;

34) $z = k\pi$, $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$-birtərtibli polyuslardır, $z = \infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 35) əgər $a \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$, $m = 0,\pm1,\pm2,...$, onda $z = 2k\pi + a$ və $z = (2k+1)\pi - a$, $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$-sadə polyuslardır, əgər $a = m\pi + \frac{\pi}{2}$, onda $m$ – cüt olduqda $z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ və $m$ – tək olduqda $z = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ ikitərtibli polyuslardır, $z = \infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 36) əgər $a \neq m\pi$, $m = 0,\pm1,\pm2,...$, onda $z = (2k+1)\pi \pm a$, $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$-bir tərtibli polyuslardır, əgər $a = m\pi$, onda $m$ – cüt olduqda $z = (2k+1)\pi$ və $m$ – tək olduqda $z = 2k\pi$ ikitərtibli polyuslardır, $z = \infty$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir; 37) $z = 1$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z = \infty$ – düzgün nöqtədir(bir tərtibli sıfırdır); 38) $z = 2$ – iki tərtibli polyusdur, $z = 2$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z = \infty$ – üç tərtibli polyusdur; 39) $z = \frac{1}{k\pi}$, $(k = \pm1,\pm2,...)$-bir tərtibli polyuslardır, $z = 0$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir, $z = \infty$ – bir tərtibli polyusdur; 40) $z = \frac{1}{k\pi}$, $(k = \pm1,\pm2,...)$-bir tərtibli polyuslardır, $z = 0$ – polyuslar üçün limit nöqtəsidir, $z = \infty$ – bir tərtibli polyusdur; 41) $z = 0$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z = \infty$ – düzgün nöqtədir(bir tərtibli sıfırdır); 42) $z = 0$ – vacib məxsusi nöqtədir, $z = \infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 43) $z = \frac{1}{k\pi}$, $(k = \pm1,\pm2,...)$-vacib məxsusi nöqtələrdir, $z = 0$ – vacib məxsus nöqtələr üçün limit nöqtəsidir, $z = \infty$ – vacib məxsusi nöqtədir; 44) $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$-vacib məxsusi nöqtələrdir, $z = 0$ – vacib məxsus nöqtələr üçün limit nöqtəsidir, $z = \infty$ – düzgün nöqtədir; 45) $z = \frac{1}{k\pi}$, $(k = \pm1,\pm2,...)$-vacib məxsusi nöqtələrdir, $z = 0$ – vacib məxsus nöqtələr üçün limit nöq-

təsidir, $z=\infty-$ vacib məxsusi nöqtədir; 46) $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}$, $(k=0,\pm1,\pm2,...)$-vacib məxsusi nöqtələrdir, $z=0-$vacib məxsus nöqtələr üçün limit nöqtəsidir, $z=\infty-$ düzgün nöqtədir. **146.**a) $\frac{28}{25}$, $-\frac{53}{25}$, $z=3$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $z=-2$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur; b) $-\frac{7}{64}$, $z=0$ nöqtəsi üç tərtibli polyusdur; v) $-1$, $z=\frac{\pi}{2}$ nöqtəsi birinci tərtib polyusdur; q) 1; d) 4, $z=1$ vacib məxsusi nöqtədir. **147.** a) 0, 1, $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $z=1$ nöqtə si sadə polyusdur; b) $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{54}(\sin 3 \mp i\cos 3)$, $\frac{1}{54}\exp\left(\pm i\left(\frac{\pi}{2}+3\right)\right)$, $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $z=\pm 3i$ nöqtəsi sadə polyusdur; v) $(-1)^k$, $k=\pm1,\pm2,...$; q) $-\frac{143}{24}$, $z=2$ vacib məxsusi nöqtədir; d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$, $z=0$ vacib məxsusi nöqtədir. **148.** a) $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $resf(0)=0$; b) $resf(0)=1$, $resf(\pm1)=-\frac{1}{2}$; v) $\pm\frac{i}{4}$; q) $e^{\alpha}-e^{\beta}$; d) $\frac{1}{e}$, $-1$. **149.**a) $resf(0)=1$, $resf(\pm1)=-\frac{1}{2}$; b) $resf(-1)=2\sin 2$, $resf(\infty)=-2\sin 2$; v) $resf(k\pi)=0$, $k=0,\pm1,\pm2,...$; q) $resf(k\pi)=-1$, $k=0,\pm1,\pm2,...$; d) $resf(2)=0$, $resf(\infty)=0$; e) $resf(0)=0$, $resf(\infty)=0$; j) $resf(-1)=-\cos 1$, $resf(\infty)=-\cos 1$; z) $resf\left(\frac{1}{k\pi}\right)=(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}$, $k=0,\pm1,\pm2,...$, $resf(\infty)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{1}{6}$; i) $resf(k^2\pi^2)=(-1)^k 2k^2\pi^2$, $k=0,1,2,...$; k) $z=0$, $z=1$ nöqtələri bir və iki tərtibli polyusdur, $resf(0)=1$, $resf(1)=0$, $resf(\infty)=-1$. **150.**a) $2\pi i$; b) 0; v) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$; q) $2\pi i$; e) $2\pi i$; j) $\frac{2\pi}{3-i}$. **151.** a) $\frac{\pi i}{4}$;

b) $-\frac{\pi i}{4}$; v) 0. **152.** a) $-\frac{\pi i}{2}$; b) $-2\pi i$; v) $-\frac{7\pi i}{32}$; q) $-\frac{143\pi i}{12}$;

e) $2\pi i\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\right)$. **153.** a)0; b) $2\pi i$; v) $\frac{\pi i}{36}\sin\frac{1}{4}$; q) $-2\pi i$.

**154.** a) $2\pi i$; b) $-2\pi i$; v) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$; q) $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$; d) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

**155.** 1)1;-1; 2) 0;0; 3)0; 0; 4)0; 0.

**156.** 1) $res[f(z)]\big|_{z=1} = res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

2) $res[f(z)]\big|_{z=0} = res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

3) $res[f(z)]\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$; 4) $res[f(z)]\big|_{z=3} = \frac{9e}{2!}$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -\frac{9e}{2!}$; 5) $res[f(z)]\big|_{z=0} = 3$, $res[f(z)]\big|_{z=1} = -3$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$; 6) $res[f(z)]\big|_{z=-1} = \frac{1}{9}$, $res[f(z)]\big|_{z=2} = -\frac{1}{9}$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

7) $res[f(z)]\big|_{z=0} = 1$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -1$; 8) $res[f(z)]\big|_{z=-1} = 1$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -1$;

9) $res[f(z)]\big|_{z=i} = -\frac{1+i}{2}$, $res[f(z)]\big|_{z=-i} = \frac{9+i}{2}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -4$.

**157.** 1) $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=0} = 2$, $z=\infty$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -2$;

2) $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=0} = 3$, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -3$;

3) $z=-1$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=-1} = 2$, $z=\infty$ bir tərtibli polyüusdur, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -2$; 4) $z=0$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=0} = 1$, $z=-1$ nöqtəsi bir tərtibli po-

lyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=-1}=2$, $z=\infty$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=-3$;

5) $z=0$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $res[f(z)]\big|_{z=0}=0$, $z=-\pi$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=-\pi}=0$, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=0$;

6) $z=0$ aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtədir, $z=-\pi$ nöqtəsi iki tərtibli polyusdur, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir,

$res[f(z)]\big|_{z=0}=res[f(z)]\big|_{z=-\pi}=res[f(z)]\big|_{z=\infty}=0$,

7) $z=0$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $z=-\pi$ nöqtəsi bir tərtibli polyusdur, $z=\infty$ vacib məxsusi nöqtədir, $res[f(z)]\big|_{z=0}=\frac{1}{\pi^2}$,

$res[f(z)]\big|_{z=-\pi}=-\frac{1}{\pi^2}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=0$;

**158.** 1) $res[f(z)]\big|_{z=i}=\frac{1}{2i}$, $res[f(z)]\big|_{z=-i}=-\frac{e^{-2i}}{2i}$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty}=\frac{1-e^{-2i}}{2i}$; 2) $res[f(z)]\big|_{z=i}=\frac{ie^{\frac{i}{2}}}{2}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=0$,

$res[f(z)]\big|_{z=i}=-\frac{ie^{\frac{i}{2}}}{2}$; 3) $res[f(z)]\big|_{z=0}=1$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=-1$;

4) $res[f(z)]\big|_{z=4i}=res[f(z)]\big|_{z=-4i}=\frac{1}{2}ch\frac{1}{4}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty}=-1$,

$res[f(z)]\big|_{z=0}=1-\frac{1}{2}ch\frac{1}{4}$; 5) $res[f(z)]\big|_{z=i}=-1-\frac{1}{6}$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty}=1+\frac{1}{6}$; 6) $res[f(z)]\big|_{z=-7}=-5$, $res[f(z)]\big|_{z=-1}=6e$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty}=5-6e$; 7) $res[f(z)]\big|_{z=0}=res[f(z)]\big|_{z=\infty}=0$;

8) $res[f(z)]\big|_{z=2}=-\frac{143}{24}$.

**159.** 1) $res[f(z)]\big|_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2}$, $res[f(z)]\big|_{z=0} = 1$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

2) $res[f(z)]\big|_{z=i} = -\frac{i}{4}$, $res[f(z)]\big|_{z=-i} = \frac{i}{4}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

3) $res[f(z)]\big|_{z=-1} = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = (-1)^{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$; 4) $res[f(z)]\big|_{z=0} = 1$,

$res[f(z)]\big|_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2}$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$; 5) $res[f(z)]\big|_{z=0} = 0$,

$res[f(z)]\big|_{z=1} = 1$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -1$; 6) $res[f(z)]\big|_{z=-1} = 2\sin 2$,

$res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -2\sin 2$; 7) $res[f(z)]\big|_{z=0} = \frac{1}{9}$,

$res[f(z)]\big|_{z=3i} = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i\cos 3)$,

$res[f(z)]\big|_{z=-3i} = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i\cos 3)$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$;

8) $res[f(z)]\Big|_{z=\frac{2k+1}{2}\pi} = -1$, $k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; 9) $res[f(z)]\big|_{z=k\pi} = (-1)^{k}$,

$k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$; 10) $res[f(z)]\big|_{z=k\pi} = 0$, $k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$;

11) $res[f(z)]\big|_{z=k\pi} = -1$, $k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$;

12) $res[f(z)]\big|_{z=2} = res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

13) $res[f(z)]\big|_{z=2} = -res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -\frac{143}{24}$;

14) $res[f(z)]\big|_{z=0} = -res[f(z)]\big|_{z=\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$;

15) $res[f(z)]\big|_{z=0} = res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$;

16) $res[f(z)]\big|_{z=-1} = -res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -\cos 1$;

17) $res[f(z)]\big|_{z=-3} = -res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -\sin 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]$;

18) $res[f(z)]\big|_{z=0} = \frac{1}{2}$, $res[f(z)]\Big|_{z=\frac{2ki}{h}\pi} = \frac{1}{2k\pi i}$, $k = \pm1,\pm2,\ldots$;

19) əgər $n<0$ və $n>0$-təkdirsə, onda $res[f(z)]\big|_{z=0} = 0$, əgər

$n=0$ və $n>0$-cütdürsə, onda $res[f(z)]\big|_{z=0} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$,

$res[f(z)]\big|_{z=0} = -res[f(z)]\big|_{z=\infty}$; 20) $res[f(z)]\Big|_{z=\frac{1}{k\pi}} = (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}$,

$k = \pm1,\pm2,\ldots$, $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6}$;

21) $res[f(z)]\big|_{z=k^2\pi^2} = (-1)^k 2k^2\pi^2$, $k = 1,2,\ldots$.

**160.** 1) a) $res[f(z)]\big|_{z=0} = -\frac{16}{3}$, b) $res[f(z)]\big|_{z=0} = -1$,

v) $res[f(z)]\big|_{z=0} = -\frac{4}{\pi^2}$;

2) a) $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -1$; b) $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = 0$; v) $res[f(z)]\big|_{z=\infty} = -\frac{1}{2}$;

**161.** 1) $-3\pi i$; 2) $\pi i$; 3) 0; 4) 0. **162.** 1) $2\pi i$; 2) $-2\pi i\cos 1$;

3) $-2\pi i\cos 1$; 4) $\frac{10\pi i}{1-4^{13}}$; 5) $2i$; 6) 0; 7) $2\pi^4 i$; 8) $18\pi i$; 9)0;

10) $\frac{58\pi i}{3}$; 11) $\frac{2^{n+2}\pi i}{(n+1)!}$; 12) $\frac{16\pi i}{3}$; 13) $-36\pi i$; 14) 0. **163.** a) $\frac{10\pi}{27}$;

b) $\pi i$. **164.** a) $\frac{17\pi}{48}$; b) $\frac{1+p^4}{1+p^2}$; v) $\frac{1-p+p^2}{1-p}$. **165.** 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$;

2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\pi}{a}e^{-am}$. **166.** a)əgər $n>0$ olarsa, onda $\frac{2\pi}{n!}$, əgər $n<0$ olarsa, onda 0; b) $i\pi sign(a)$, $a\neq 0$ olduqda inteqralın baş qiyməti 0-dır.

**167.** a) $-\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2e}$; v) $\pi e^{ar}$, $a>0$, $r>0$;

q) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}+\sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; d) $\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$. **168.** a) $\pi\sqrt{2}$; b) $\frac{4\pi}{3}$;

v) $-\frac{\pi}{27}$; q) $\frac{\pi}{4a}$; d) $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}$. **169.** 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2\pi}{9}$; 3) $\frac{7\pi}{10\sqrt{10}}$;

4) $\frac{5\pi}{8}$; 5) $\frac{6\pi}{5\sqrt{5}}$. **170.** 1) $\frac{\pi}{54}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; 3) $-\frac{\pi i}{6}$; 4) $\frac{\pi}{8}$; 5) $\frac{\pi}{2}$;

6) $-\frac{\pi i}{6}$; 7) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\cos 1$; 8) $-\pi e^{-1}\sin 1$; 9) $\pi i e^{-2}$; 10) $\frac{\pi e^{-1}}{4}$;

11) $-\pi i e^{-2}$; 12) $\pi i e^{-1+i}$; 13) $\frac{\pi}{2}e^{-6}$; 14) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-4\sqrt{2}}(3\cos 8-\sqrt{2}\sin 8)$;

15) $\frac{\pi}{3}e^{-18}(3\cos 12+2\sin 12)$; 16) $\frac{\pi}{2}e^{-12}$; 17) $\pi e^{-12}$; 18) $\frac{\pi i}{6}$;

19) $\frac{\pi}{4}e^{-6}$; 20) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-1}(\cos 1+\sin 1)$; 21) $\pi\sqrt{2}$; 22) $\frac{3\pi}{8}$.

**171.** 1) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; 2) $-2\pi i$; 3) $-\frac{\pi i}{121}$; 4) $\pi i$; 5) $-\frac{2\pi i}{9}$; 6) 1; 7) 0;

8) $n\geq -1$ olduqda $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, $n<-1$ olduqda 0; 9) $32\pi i$; 10) 0.

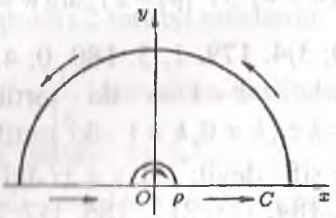
**172.** 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; 2) $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\frac{(2a+b)\pi}{\left[a(a+b)\right]^{\frac{3}{2}}}$; 4) $|a|<1$ olduqda

$\frac{2\pi}{1-a^2}$, $|a|>1$ olduqda $\frac{2\pi}{a^2-1}$; $|a|=1$, $a\neq\pm 1$ olduqda 0 (baş qiymət), $a=\pm 1$ olduqda baş qiymət yoxdur; 5) $|a|<1$ olduqda

$\frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$, $|a|>1$ olduqda $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$; $|a|=1$, $a\neq\pm 1$ olduqda

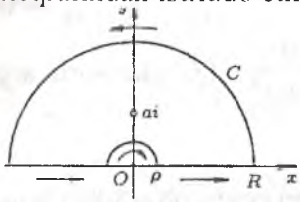
$\frac{\pi(1-a^{12})}{2a^6(a^2-1)}$ (baş qiymət), $a=\pm 1$ olduqda baş qiymət yoxdur;

6) $n \geq 0$ olduqda $\frac{2\pi}{n!}$, $n < 0$ olduqda 0; 7) $\pi i sign a$ ($a = 0$ olduqda baş qiymət 0); 8) $-2\pi i sign \operatorname{Im} a$. **173.** 1) $-\frac{\pi}{27}$; 2) $\frac{\pi}{4a}$; 3) $n > 1$ olduqda $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)\pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2}$, $n = 1$ olduqda $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; 5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. Göstəriş. $\int_C \frac{dz}{1+z^n}$, ($C$ – konturu $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ şüaları və onları birləşdirən çevrə qövsüdür) inteqralına baxmaq lazımdır; 7) $\frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. **174.** 1) $\pi\left(e^{-ab} - \frac{1}{2}\right)$; 2) $\frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-ab}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4b^4}\left(2 - (2+ab)e^{-ab}\right)$; 4) $\pi(b-a)$; 5) $\frac{\pi}{2}$. **Göstəriş:** $\int_C \frac{e^{2iz}-1}{z^2} dz$ ($C$ – konturu şəkil 58-dəki kimidir) inteqralından istifadə etmək lazımdır; 6) $\frac{3\pi}{8}$. **Göstəriş:** $\int_C \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz$ ($C$ – konturu şəkil 58-dəki kimidir) inteqralından istifadə etmək lazımdır); 7) $\frac{\pi}{2a} \ln a$. **Göstəriş:** $\int_C \frac{\ln z dz}{z^2 + a^2} dz$ ($C$ – konturu şəkil 59-dakı kimidir) inteqralından istifadə etmək lazımdır);

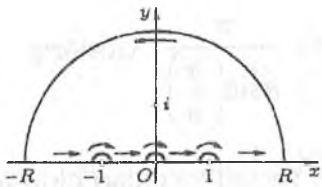


Şəkil 58

8) $\frac{\pi}{8a}(\pi^2+4\ln^2 a)$; 9) $\frac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\frac{3}{2}\ln a-1-\frac{3\pi}{4}\right)$; 10) $-\pi$; 11) $\frac{\pi}{4}\ln 2$. **Göstəriş:** $\int_C \ln\left(\frac{1}{z}-z\right)\frac{dz}{1+z^2}$ ($C$ – konturu şəkil 60-dakı kimidir) inteqralından istifadə etmək lazımdır);



Şəkil 59.



Şəkil 60.

12) $\frac{1}{2}\ln^2\frac{a}{1+a}$. **175.** a) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$; b) $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1)$; v) $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$. **176.** a) $|w'|=\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\arg w'=arctg\,4$; b) $|w'|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg w'=arctg\,2$. **177.** a) $|w'|=\frac{1}{9}$, $\arg w'=0$; b) $|w'|=1$, $\arg w'=0$; v) $|w'|=2$, $\arg w'=\frac{3\pi}{2}$; q) $|w'|=1$, $\arg w'=\frac{\pi}{6}$. **178.** 1) 1; 2)0; 3)4. **179.** 1; 3. **180.** 0; 4. **181.** 2. **182.** $n$. **183.** 1) $z=\pm 2i$-sadə sıfırlar, $z=1$ isə iki tərtibli sıfırdır; 2) $z=0$-sadə sıfırdır; $z=k\pi$, $k\neq 0, k\neq 1$ -iki tərtibli sıfırlardır; $z=\pi$ nöqtəsi funksiyanın sıfrı deyil; 3) $z=\pm i$-iki tərtibli sıfırlar, $z=1\pm i$ isə sadə sıfırdır. **184.** 1)3; 2) 2. **185.** 1)2; 2) 2; 3)4; 4)a)7; b)1; 5)0; 6)1; 7)2; 8)1; 9)3; 10)1 . **186.** $n$. **187.** 1)4; 2)15; 3)3. **188.** 1) $k+l$-tərtibli sıfır; 2) $\min(k,l)$-tərtibli sıfır; 3) əgər $k>l$ olarsa, onda $k-l$-tərtibli sıfır, əgər $k=l$ olarsa, onda sıfır olmayan düzgün nöqtə, əgər $k<l$ olarsa, onda məxsusi nöqtədir. **189.** 1) $z=\pm 3i$ nöqtələri bir tərtibli sıfırlardır; 2) $z=\pm 3i$ nöqtələri bir tərtibli sıfırlardır, $z=\infty$ nöqtəsi 2 tərtibli sıfırdır; 3) $z=0$ nöqtəsi 2 tərtibli sıfırdır, $z=k\pi$ ($k=\pm 1,\pm 2,...$) nöqtələri bir tərtibli sıfırlardır; 4) $z=\pm 2$ nöqtələri 3 tərtibli sıfırlardır, $z=2k\pi i$ ($k=0,\pm 1,\pm 2,...$) nöqtələri

bir tərtibli sıfırlardır; 5) $z = 2k\pi$ $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 2 tərtibli sıfırlardır; 6) $z = \pm\pi$ nöqtələri 3 tərtibli sıfırlardır, bütün digər $z = k\pi$ $(k = 0,\pm2,\pm3,...)$ nöqtələri bir tərtibli sıfırlardır; 7) $z = \frac{\pi}{4} \pm k\pi$ $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri bir tərtibli sıfırlardır; 8)sıfırları yoxdur; 9) $z = k\pi$ $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 3 tərtibli sıfırlardır; 10) $z = 0$ nöqtəs 2 tərtibli sıfırdır, $z = k\pi$ $(k = \pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 3 tərtibli sıfırlardır; 11) $z = 0$ nöqtəs 3 tərtibli sıfırdır, $z = \sqrt[3]{k\pi}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}(1 \pm i\sqrt{3})$ $(k = \pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 1 tərtibli sıfırlardır; 12) $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 3 tərtibli sıfırlardır;

13) $z = \sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(1 \pm i\sqrt{3})$ $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 1 tərtibli sıfırlardır; 14) $z = 4$ nöqtəsi budağın biri üçün 3 tərtibli sıfırdır; 15) burada iki funksiya verilmişdir: bunlardan biri üçün $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ nöqtələri 2 tərtibli, digəri üçün isə $z = (2k+l)\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $(k = 0,\pm1,\pm2,...)$ nöqtələri 2 tərtibli sıfırlardır.

**190.** a) $|w'| = 16((x-2)^2 + y^2)$. $(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ dairəsinin daxili sıxılır, xarici genişlənir, öz isə dəyişməz qallır; b) $|w'| = (x^2 + y^2)^{-1}$. $x^2 + y^2 = 1$ dairəsinin xarici sıxılır, daxili genişlənir, özü isə dəyişməz qalır. **191.** $arctg\frac{1}{2}$. **192.** $w = -\frac{iz}{2} + \frac{3}{2}i - 1$. **193.** $w = 2z + 2 - 2i$. **194.** $w = 2iz + 4 + 6i$. **195.** təpələri $-1$, $-1+3i$ və $-3$ nöqtələrində olan oxşar üçbucaq. **196.** tərəfləri $u = \frac{5}{2}$, $v = 3$, $u = 1$ və $v = 1$ olan düzbucaqlı. **197.** $w = (2+i)z + 1 - 3i$. **198.** a) $u = \frac{1}{a}$-bu xəyali oxa paralel və inikas olunan çevrələrin radiuslarının artması ilə qeyri-

məhdud olaraq ona yaxınlaşan düz xətlər ailəsidir; b) $b(u^2+v^2)+u+v=0$. $b\neq 0$ olduqda radiusları $b$-nin artması ilə azalan çevrələr ailəsidir. $b=0$ olduqda $v=-u$ düz xəttidir.

**199.** $w$ müstəvisinin $\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\frac{1}{16}$ yarımdairəsi atılmış hissəsi ikinci kvadrantı: $u\le 0, v\ge 0$. **200.** $w$ müstəvisinin $u^2+v^2=1$ dairəsi və dördüncü kvadrantı atılmış hissəsi.

**201.** $90^0<\arg z<0, \frac{1}{2}<|w|<1$ dairəvi halqanın hissəsi.

**202.** $w=\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$. **203.** $w=-\frac{iz+1}{z+i}$. **204.** $\operatorname{Im} w<0$ yarımmüstəvisinin $\left|w-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ dairəsinin hissəsi atılmış oblast. **205.** $w$ müstəvisinin $(u+1)^2+v^2=1$ dairəsinin xarici.

**206.** $w$ müstəvisinin $|w-1-2i|\le\sqrt{5}$, $\left|w-1+\frac{1}{2}i\right|\ge\frac{\sqrt{5}}{2}$ dairələri ilə məhdudlandığı xarici. **207.** $v>u$. **208.** $w$ müstəvisinin $\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ hissəsi. **209.** $w$ müstəvisinin $\operatorname{Re} w<0$ yarımmüstəvisinin koordinat başlanğıcından çıxan $\arg w=135^0$ və $\arg w=-135^0$ şüalarının özləri də daxil olmaqla məhdudlaşdırdığı hissə.

**210.** $w=\frac{(1+i)z+2}{z+i}$, $z_0=\frac{1}{2}(i\pm\sqrt{7})$. **211.**a) $\left|w-\frac{1}{3}\right|>\frac{1}{3}$; b) $135^0$-li bucaq: $u<0, v<-u$. **212.**a) $w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+3i+1}$; b) $w=\frac{2z+1}{z+2}$.

**213.** $w=\frac{z+24}{3z}$, $r=\frac{2}{3}$. **214.** $w=-\frac{z}{z+1-i}$. Çoxluğun obrazı $v<u$ yarımmüstəvisi ilə $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{1}{2}$ dairəsinin xaricinin kəsişməsi. **215.** $w=\frac{z-i}{iz-1}$. **216.** $w=\frac{(i-1)z+1}{-z+i+1}$. **217.** Sərhədi $u=\frac{1}{2}$ düz xətti və $\left|w-\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}$ çevrəsindən ibarət olan iki rabitəli oblastı.

**218.** $ad - b\bar{c} = 0$, $\operatorname{Im}\dfrac{b}{a} > 0$. **219.** $1 < |w| < e$, $0 < \arg w < 90^0$.

**220.** a) $w = -e^{-z}$; b) $w = e^{\pi z}$. **221.** a) $w = \exp\left(\dfrac{\pi}{h}(1-i)z\right)$, əvvəlcə zolağı döndərmək lazımdır; b) $w = \exp\left(\dfrac{2\pi i z}{z-2}\right)$; v) $w = \exp\left(\dfrac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}\right)$.

**222.** a) $3\pi < v < 5\pi$; b) $-\pi < v < \pi$. **223.** $0 < v < 2\pi$.

**224.** $0 \le \operatorname{Im} z \le 90^0$ zolağına. **225.** $v = 0, v = \dfrac{\pi}{2}, u = 0, u = 1$ xətləri ilə məhdudlaşmış düzbucaqlıya. **226.** $w = -i(z-1-i)^2$. **227.** $v \ge 0$ müstəvisinin $u = \dfrac{1}{4}v^2 - 1$ və $u = 1 - \dfrac{1}{4}v^2$ parabolaları ilə məhdudlaşmış yuxarı hissəsi. **228.** $u = \left(\dfrac{v}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\dfrac{v}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$. **229.** $v = \dfrac{1}{2}\left(u^2 - 1\right)$.

**230.** $w = \dfrac{2 + iz^2}{2 - iz^2}$. **231.** $w = -\dfrac{1 + iz^6}{i + z^6}$. **232.** $v = 0, v = 2, u = -1, u = 1$ xətləri ilə məhdudlaşmış düzbucaqlıya. **233.** $|z| = R$ çevrəsinə $\dfrac{4u^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{4u^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1$ ellipsləri uyğundur. $\arg z = \alpha$ şüalarına isə $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{u^2}{\sin^2\alpha} = 1$ hiperbolalarının budaqları uyğundur.

**234.** a) $\dfrac{4u^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{4u^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} > 1$ ellipsinin xaricinə; b) $[-1;1]$ parçası boyunca kəsiyi olan bütün müstəviyə; v) həqiqi oxda yerləşən $(-\infty;-1]$ və $[1;+\infty)$ şüalarına boyunca kəsiyi olan bütün müstəviyə.

**235.** a) $\dfrac{4u^2}{\left(R + \dfrac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{4u^2}{\left(R - \dfrac{1}{R}\right)^2} = 1$ ellipsinin daxilinin yuxarı hissəsi;

b) $u^2 - v^2 = \dfrac{1}{2}$ hiperbolasının budaqları arasındakı oblast.

**236.** $w = z^2$ funksiyası üçün: 1) $\theta = 0, k = 2$; 2) $\theta = \pi, k = \frac{1}{2}$; 3) $\theta = \frac{\pi}{4}, k = 2\sqrt{2}$; 4) $\theta = \pi - arctg\frac{4}{3}, k = 10$; $w = z^2$ funksiyası üçün: 1) $\theta = 0, k = 3$; 2) $\theta = 0, k = \frac{3}{16}$; 3) $\theta = \frac{\pi}{2}, k = 6$; 4) $\theta = -2arctg\frac{4}{3}, k = 75$. **237.** 1) $|z| < \frac{1}{2}$ olduqda sıxılma, $|z| > \frac{1}{2}$ olduqda isə genişlənmə; 2) $|z+1| < \frac{1}{2}$ olduqda sıxılma, $|z+1| > \frac{1}{2}$ olduqda isə genişlənmə; 3) $|z| > 1$ olduqda sıxılma, $|z| < 1$ olduqda isə genişlənmə; 4) $\operatorname{Re} z < 0$ olduqda sıxılma, $\operatorname{Re} z > 0$ olduqda isə genişlənmə; 5) $|z-1| > 1$ olduqda sıxılma, $|z-1| < 1$ olduqda isə genişlənmə. **238.** 1) $|z| < \frac{1}{2}$ olduqda sıxılma, $|z| > \frac{1}{2}$ olduqda isə genişlənmə; 2) $|z+1| < \frac{1}{2}$ olduqda sıxılma, $|z+1| > \frac{1}{2}$ olduqda isə genişlənmə; 3) $|z| > 1$ olduqda sıxılma, $|z| < 1$ olduqda isə genişlənmə; 4) $\operatorname{Re} z < 0$ olduqda sıxılma, $\operatorname{Re} z > 0$ olduqda isə genişlənmə; 5) $|z-1| > 1$ olduqda sıxılma, $|z-1| < 1$ olduqda isə genişlənmə. **239.** $w = (1+i)(1-z)$. **240.** $w = (2+i)z + 1 - 3i$. **241.** 1) $w = az + b$; 2) $w = -az + b$; 3) $w = -i(az + b)$; 4) $w = az + bi$ ($a, b$ – ədədləri hər yerdə həqiqi ədədlərdir və $a > 0$). **242.** 1) $w = z + bi$ və ya $w = -z + 1 + bi$; 2) $w = z + b$ və ya $w = -z - i + b$; 3) $w = z + b(1+i)$ və ya $w = -z + 1 + b(1+i)$ ($b$ – hər yerdə həqiqi ədəddir). **243.** 1) $w = z + bi$ və ya $w = -z + 1 + bi$; 2) $w = z + b$ və ya $w = -z - i + b$; 3) $w = z + b(1+i)$ və ya $w = -z + 1 + b(1+i)$ ($b$ – hər yerdə həqiqi ədəddir). **244.** 1) $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w < 0$ yarımdairəsi; 2) $w = 0$ nöqtəsini özündə saxlayan və $|w| = 1, \left|w - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$ çevrələrinin qövsləri ilə məhdudlaşan çoxluğa; 3) $\operatorname{Im} w < 0$ çoxluğundan

$\left|w-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$ çevrəsinin bu çoxluğa aid hissəsini çıxdıqdan sonra qalan çoxluğa; 4) $\operatorname{Re} w=1$ düz xətti və ona toxunan $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ çevrəsi ilə məhdudlaşan çoxluğa; 5) bir-birinə toxunan $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ və $\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$ çevrələri ilə məhdudlaşan çoxluğa; 6) sərhədləri $\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}$ düz xətti və $\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{2}{3}$ çevrəsi olan iki rabitəli çoxluğa.

**245.** a)1) $w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$; 2) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$.

b)1) $w=\frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$; 2) $w=\frac{iz+2+i}{z+1}$; 3) $w=\frac{1-i}{2}(z+1)$.

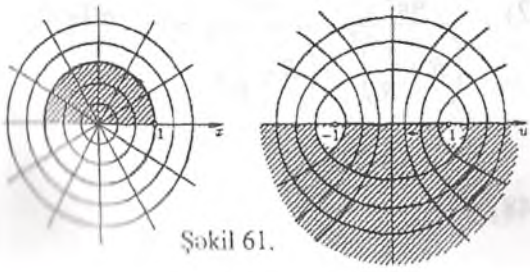
**246.** 1) $w=\frac{(-1+3i)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; 2) $w=\frac{z(1-4i)-2(1-i)}{2z(1-i)-(4-i)}$;

3) $w=\frac{z(3-i)-(1+i)}{(1+i)(1-z)}$; 4) $w=\frac{z-i}{iz-1}$. **247.** 1) $w=\frac{az+b}{cz+d}$,

$a,b,c,d$ – ədədləri həqiqi ədədlərdir və $ad-bc>0$; 2) $w=\frac{az+b}{cz+d}$,

$a,b,c,d$ – ədədləri həqiqi ədədlərdir və $ad-bc<0$; 3) $w=i\frac{az+b}{cz+d}$,

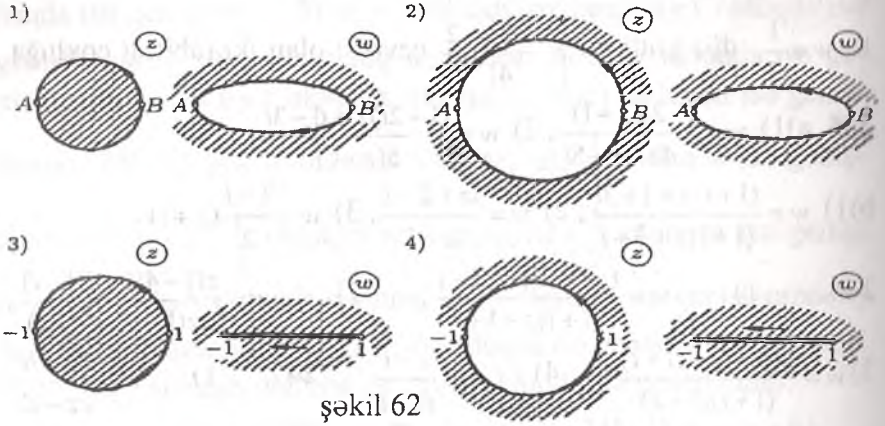
$a,b,c,d$ – ədədləri həqiqi ədədlərdir və $ad-bc<0$. **248.** $|z|=R$ çevrələrinə $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ($|z|=1$ çevrəsinə $v=0,-1\le u\le 1$ parçası) homfokus ellipsləri uyğundur; $\arg z=\alpha$ şüalarına $\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1$ ($\arg z=0$ şüasına



Şəkil 61.

$v=0, u\geq 1$ şüası, $\arg z=\pi$ şüasına $v=0, u\leq -1$ şüası, $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$ şüasına $u=0$ oxu) həmfokus hiperbolaların qanadları uyğundur (şəkil 61).

**249.** 1), 2) $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ellipsinin xarici (şəkil 62. 1), 2)); 3), 4) $[-1;1]$ parçası boyunca kəsiklə bütün müstəvi (şəkil 62.3), 4));




şəkil 62

5), 6) $(-\infty;-1]$ və $[1;\infty)$ şüaları boyunca kəsiklə bütün müstəvi $\operatorname{Im} z<0$; 7) aşağı yarımmüstəvi; 8) yuxarı yarımmüstəvi; 9) yuxarı yarımmüstəvi; 10) $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ellipsin daxilinin yuxarı yarısı; 11) $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ellipsin daxilinin aşağı yarısı; 12) $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ ellipsin daxilinin sağ yarısı

$\left[1;\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]$ parçası boyunca kəsiklə; 13) $\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{v^2}{\cos^2\alpha}=1$ hiperbolasının qanadları arasındakı çoxluq.

**250.** 1)a) $\operatorname{Im} w=1$; b) $\operatorname{Re} w=0$; v) $\begin{cases}\operatorname{Re} w<0\\ \operatorname{Im} w>-1\end{cases}$; 2) $\operatorname{Im} w=0$;

3) $|w-1+i|<2$; 4) a) $\operatorname{Re} w>1$; b) $|w+1|>\sqrt{3}$; v) $|w+1|\le\sqrt{3}$ dairəsi atılmış $\operatorname{Re} w<1$ yarımmüstəvi; 5)a) $\operatorname{Im} w=0$; b) $\left|w-1+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$;

v) $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2\le\frac{1}{4}$ dairəsi atılmış $\operatorname{Re} w<1$ yarımmüstəvi;

q) $(u-1)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$ dairəsi atılmış $\operatorname{Im} w<0$ yarımmüstəvi;

6)a) $v=-\frac{1}{2}$; b) $u=0$.

## Ədəbiyyat


1. **Axundov Ə.Y., Qasımov R.A., Mirzəyeva S.M.** Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi (çalışmalar) (metodik vəsait). Lənkəran, 2001, AzTU-nin mətbəəsi, 140 səh.
2. **Cəfərov H.H., Adıgözəlov A.C.** Analitik funksiyalar nəzəriyyəsindən məsələ və misallar. APİ-nin nəşri, Bakı, 1978, 98 səh.
3. **Алешков Ю. З.** Лекции по теории функций комплексного переменного. СПб.: Изд-во С.-Петерб. унта. 1999, 196 с.
4. **Алешков Ю. З., Смышляев П. П.** Теория функций комплексного переменного и ее приложения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.. 1986, 248 с.
5. **Ангилейко И.М., Козлова Р.В.** Задачи по теории функций комплексной переменной. Минск: Вышейшая школа, 1976, 128с.
6. **Бицадце А., В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984, 320 с.
7. **Боярчук А.К.** Функции комплексного переменного: теория и практика. Справочное пособие по высшей математике. Т.4. М.: Едиториал, УРСС, 2001, 352 с.
8. **Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 312 с.
9. **Горяйнов В.В.** Курс лекций по теории функций комплексного переменного. Волгоград. Изд. Волгоградского государственного университета. 1998, 124 с.
10. **Грищенко А.Б. и др.** Теория функций комплексного переменного: решение задач: Учеб. пособие. Киев: Вища школа, 1986, 333 с.
11. **Гюнтер Н.М., Кузьмин Р. О.** Сборник задач по высшей математике. Т.3. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 268 с.
12. **Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. М.:Высшая школа, 1980. 366 с.
13. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. М.: Наука, 1985.
14. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 486 с.

15. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987
16. **Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.** Введение в теорию аналитических функций. М., 1977, 320 с.
17. **Пантелеев А.В., Якимова А.С.** Теория функций комплексного переменного в примерах и задачах. Учеб. пособие. 3-е изд., испр. 2007, 445 с.
18. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984, 444 с.
19. **Рудкевич Е.А.** Функции комплексного переменного и операционное исчисление (методы решения задач). Учеб.пособие/ Тул.Гос.Ун-т. Тула, 2004, 64 с.
20. Сборник задач по теории аналитических функций/ Под ред. **М.А. Евграфова.** 2-е изд. М.: Наука, 1972, 416 с.
21. **Свешников А.Г., Тихонов А.Н.** Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979, 304с.
22. **Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.** Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. для вузов. М.: Наука, Гл.ред.физ.мат.лит., 1989, 480 с.
23. **Соломенцев Е. Д.** Функции комплексного переменного и их применения. М.: Высш. шк., 1988.
24. **Старков В.Н.** Задачи по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998, 100 с.
25. **Старков В.Н., Степенко Н.А.** Теория функций комплексной переменной. Учеб.пособие. СПб.: «СОЛО», 2007, 103с.
26. **Стоилов С.** Теория функций комплексного переменного. Т. 1, 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
27. **Фукс Б.А., Шабат Б.В.** Функции комплексного переменного. М.: ГИФМЛ, 1951
28. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.
29. **Эйлерман В.Я.** Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 256 с.

## Mündəricat


Ön söz ..... 3

**I FƏSİL. KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ KOMPLEKS ƏDƏDLƏR ARDICILLIĞI**

§1. Kompleks ədəd anlayışı. Kompleks ədədlər üzərində əməllər ..... 4
1.1. Kompleks ədədlərin cəbri yazılış forması ..... 4
1.2. Kompleks ədədlərin həndəsi təsviri ..... 7
1.3. Kompleks ədədin modulu və arqumenti ..... 8
1.4. Kompleks ədədin triqonometrik yazılış forması ..... 9
1.5. Kompleks ədədin üstlü yazılışı ..... 11
1.6. Kompleks ədədin tam qüvvətə yüksəldilməsi ..... 11
1.7. Kompleks ədəddən kökalma ..... 13
§2. Kompleks ədədlər ardıcıllığı ..... 15
2.1. Stereoqrafik proyeksiya. Riman sferası ..... 19

**II FƏSİL. KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR**

§3. Kompleks dəyişənli funksiya anlayışı ..... 24
3.1 Kompleks dəyişənli funksiyanın kəsilməzliyi ..... 30
3.2. Oblastda müntəzəm kəsilməzlik ..... 33
§4. Kompleks dəyişənli funksiyanın diferensiallaşması ..... 34
4.1. Kompleks dəyişənli analitik funksiya anlayışı ..... 37
4.2. Koşi-Riman şərtlərindən alınan nəticələr ..... 38
4.3. Analitik funksiyanın xassələri ..... 39
§5. Kompleks dəyişənli funksiyanın inteqralı ..... 42
5.1. Həqiqi dəyişənli kompleks funksiyanın inteqralı ..... 42
5.2. Hissə-hissə hamar əyri ..... 43
5.3. Kontur inteqralının xassələri ..... 44
§ 6. Koşi teoremi ..... 46
6.1. Köməkçi anlayışlar. Qrin düsturu. ..... 46
6.2. Koşi teoremi. Çoxrabitəli oblast halı ..... 46
6.3. Kompleks dəyişənli funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralı ..... 48
6.4. Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri ..... 49
§7. Koşi inteqralı ..... 51
7.1. Koşinin inteqral düsturu ..... 51

7.2. Orta qiymət düsturu. Modulun maksimumluq prinsipi..... 52
§8.Koşi tipli inteqral və onun xassələri..... 55
8.1. Koşi tipli inteqral..... 55
8.2. Kompleks dəyişənli funksiyanın bütün tərtibdən törəmələrinin varlığı..... 56
8.3. Morer və Liuvill teoremləri..... 57

**III FƏSİL. KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR SIRALARI**

§9. Analitik funksiya sıraları..... 71
9.1. Ədədi sıralar..... 71
9.2. Funksional sıra anlayışı..... 75
9.3. Oblastda sıranın müntəzəm yığılması..... 75
§10. Qüvvət sıraları..... 80
10.1. Abel teoremi. Abel teoreminin nəticəsi..... 80
10.2. Teylor teoremi..... 87
§11. Analitik funksiyanın təyininin yeganəliyi..... 92
11.1. Düzgün nöqtə anlayışı..... 92
11.2. Analitik funksiyanın sıfırları..... 93
11.3. Analitik funksiyanın təyininin yeganəliyi teoremi.. 95
§12.Analitik davam anlayışı..... 95
12.1. İki oblastın ümumi alt oblastında analitik davam... 95
12.2. İki oblastın ümumi sərhədində analitik davam..... 97
§13. Həqiqi oxda analitik davam..... 98
13.1. Kompleks dəyişənli elementar funksiyalar..... 98
13.2. Münasibətlərin analitik davamı..... 99
13.3. Riman səthi anlayışı..... 100
13.4. Budaqlanma nöqtəsi anlayışı..... 101
§ 14. Loran sırası..... 103
14.1. Loran sırasının yığılma halqası..... 103
14.2. Dairəvi halqada kompleks dəyişənli funksiyanın Loran sırasına ayrılışı..... 104
§15. Analitik funksiyanın məxsusi nöqtələri..... 116
15.1. Aradan qaldırıla bilən məxsusi nöqtələr. Polyus... 116
15.2. Vacib məxsusi nöqtə. Soxotski-Veyerştrass teoremi..... 118

## IV FƏSİL. ÇIXIQLAR NƏZƏRİYYƏSİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

§ 16. Analitik funksiyanın izolə edilmiş məxsusi nöqtədə çıxığı anlayışı ..... 125
16.1. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin əsas teoremi ..... 125
16.2. Polyusda çıxıqların hesablanması düsturları ..... 126
16.3. Funksiyanın sonsuz uzaqlaşmış nöqtədə çıxığı ..... 127
§ 17. Çıxıqlar nəzəriyyəsinin həqiqi dəyişənli funksiyaların I növ qeyri-məxsusi inteqrallarının hesablanmasına tətbiqi ..... 127
§18. Loqarifmik çıxıqlar ..... 147
18.1.Sıfırların və polyusların hesablanması düsturları ..... 147
18.2. Arqument prinsipi ..... 148
18.3. Ruşe teoremi və cəbrin əsas teoremi ..... 149

## V FƏSİL. KONFORM İNİKASLAR

§ 19. Konform inikaslar ..... 151
19.1. $f'(z_0) \neq 0$-ın həndəsi mənası. Gərilmələrin sabitliyi və bucaqların saxlanması xassələri. Nöqtədə konform inikaslar ..... 151
19.2. Konform inikasın əsas tərifi. Oblastın konform inikasının zəruri və kafi şərti ..... 153
19.3. Konform inikasların əsas prinsipləri ..... 154
19.3.1. Sərhədlərin uyğunluğu prinsipi ..... 154
19.3.2. Riman teoremi. Konform inikasların əsas qanunu ..... 154
19.4. Konform inikaslarda istifadə olunan əsas funksiyalar ..... 155
19.5.Bəzi elementar funksiyaların konform inikaslarına misallar ..... 167
Müstəqil həll etmək üçün çalışmalar ..... 170
Cavablar və göstərişlər ..... 214
Ədəbiyyat ..... 250
Mündəricat ..... 252

**Şükürov Rasim Yusif oğlu**
**Əsədov Tofiq Babulla oğlu**

# KOMPLEKS DƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİ

**(Dərs vəsaiti)**

*Nəşriyyatın direktoru:* ***Hüseyn Hacıyev***
*Texniki redaktor:* ***Raya Əliyeva***
*Dizayn:* ***Müşfiq Hacıyev***
*Cildçi:* ***Azad Həmzəyev***
*Montajçı:* ***Elmira İsmayılova***

---

*Çapa imzalanmış 04.05.2012-ci il*
*Kağız formatı 60x84 1/16, çap vərəq 16*
*Sifariş77, sayı 300, qiyməti sərbəst*
*ADPU-nun mətbəəsi*
*Bakı, Ü.Hacıbəyov küçəsi, 34*
*Tel: 493-74-10*